Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2018-19, I semestre
7 novembre, 2018

CP410: Esonero 1, 7 novembre, 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia X una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Per $x \in \mathbb{R}$, sia $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ e sia $\mathcal{I}$ l'insieme

$$\mathcal{I} = \{A_x\,,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrare che

(a) $\mathcal{I}$ è un π-sistema

(b) $\mathcal{I}$ genera la piú piccola σ-algebra su Ω che rende X misurabile, ossia $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{I})$.

(c) La funzione $x \mapsto \mathbb{P}(A_x)$ è continua da destra.

Soluzione: Per il punto a) notiamo che $A_x \cap A_y = A_{\min\{x,y\}}$ e dunque $A_x \cap A_y \in \mathcal{I}$.

Per il punto b) osserviamo che la σ-algebra generata da X è

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Inoltre $A_x = X^{-1}((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{C} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ allora $\mathcal{I} = \{X^{-1}(C),\ C \in \mathcal{C}\}$. Vogliamo mostrare che $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{I})$. Poiché $\mathcal{I} \subset \sigma(X)$, è sufficiente mostrare che per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha $X^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{I})$. Definiamo

$$\mathcal{E} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ X^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{I})\}.$$

Si vede senza difficoltà che $\mathcal{E}$ è una σ-algebra. Inoltre $\mathcal{C} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Dunque ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ soddisfa $X^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{I})$.

Per il punto c): $F(x) = \mathbb{P}(A_x)$ è monotona non decrescente. Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_0 + n^{-1}) = \mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}}\{X \leqslant x_0 + n^{-1}\}) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x_0\}) = F(x_0),$$

dove abbiamo usato la monotonia della misura nella seconda uguaglianza.

Nome:____

2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza dominata.

Nome:____

3. Consideriamo infiniti lanci indipendenti di una moneta equa, e sia Y_n il numero di teste nei primi n lanci. Dimostrare le seguenti affermazioni:

   (a) $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty\right) = 1$.

   (b) $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}\right) = 1$.

   (c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > \epsilon n) = 1$ per ogni $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Soluzione: (a). L'evento $\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty$ coincide con 'infinite teste'. Allora (a) segue da Borel-Cantelli 2.

(b). L'affermazione $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}\right) = 1$ è la legge dei grandi numeri forte per le variabili aleatorie i.i.d.

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{se moneta } k \text{ è croce} \\ 1 & \text{se moneta } k \text{ è testa} \end{cases}$$

e dunque puo' essere mostrata per esempio con l'argomento del momento quarto (le X_k sono limitate). Notiamo che (b) implica (a) poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}$ implica $\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty$.

(c). Se $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}$ quasi certamente, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}$ in probabilità, ossia per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \delta\right) = 0.$$

Se $\epsilon \in (0, 1/2)$ e $\delta = \frac{1}{2} - \epsilon > 0$ allora $\frac{Y_n}{n} \leqslant \epsilon$ implica $\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \delta$ e dunque

$$\mathbb{P}(Y_n > \epsilon n) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leqslant \epsilon\right) \geqslant 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \delta\right) \to 1.$$

Nome:______________________________________

4. Sia X una variabile aleatoria limitata. Si consideri la funzione

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]\,.$$

   (a) Dimostrare che $\varphi(\lambda) \geqslant \lambda \mathbb{E}[X]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Usare la disuguaglianza di Hölder per dimostrare che φ è convessa.

   (c) Dimostrare che $\mathbb{P}(X \geqslant \epsilon) \leqslant e^{-\epsilon\lambda+\varphi(\lambda)}$ per ogni $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$.

Soluzione:
(a). La funzione $x \mapsto e^{\lambda x}$ è convessa per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e dunque per la disuguaglianza di Jensen si ha

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \geqslant e^{\lambda \mathbb{E}[X]}.$$

Allora $\varphi(\lambda) \geqslant \lambda \mathbb{E}[X]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $s \in (0,1)$ e $\lambda = sa + (1-s)b$. Allora se $p, q > 1$ sono tali che $1/p + 1/q = 1$ si ha:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{saX} e^{(1-s)bX}] \leqslant \mathbb{E}[e^{psaX}]^{1/p} \mathbb{E}[e^{q(1-s)sbX}]^{1/q} = e^{\frac{1}{p}\varphi(psa)+\frac{1}{q}\varphi(q(1-s)b)}.$$

Ponendo $p = 1/s$ e $q = 1/(1-s)$ e passando ai logaritmi si ha

$$\varphi(sa + (1-s)b) \leqslant s\varphi(a) + (1-s)\varphi(b).$$

(c). Se $\epsilon, \lambda > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(X \geqslant \epsilon) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geqslant e^{\lambda\epsilon}) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\epsilon}} = e^{-\epsilon\lambda+\varphi(\lambda)},$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Markov.

Nome:______________________________________

5. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme in $[-1, 1]$. Dimostrare che

   (a) $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ q.c.

   (b) $\liminf_{n\to\infty} X_n = -1$ q.c.

   (c) $\liminf_{n\to\infty} n(1 + X_n) = 0$ q.c.

Soluzione:
(a). Notiamo che se $\epsilon > 0$ è fissato, $\mathbb{P}(X_n > 1 - \epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$. Allora per Borel-Cantelli 2 si ha quasi certamente $X_n > 1 - \epsilon$ per infiniti indici n. Dunque $\limsup_{n\to\infty} X_n \geqslant 1 - \epsilon$ q.c. e poiché $X_n \leqslant 1$ e $\epsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo si ha $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ q.c.

(b). Per simmetria delle variabili X_n si ha $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\limsup_{n\to\infty} X_n = -1$ q.c.

(c). Osserviamo che se $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(n(1 + X_n) < \epsilon) = \mathbb{P}(X_n < -1 + \epsilon/n) = \frac{\epsilon}{2n},$$

che non è sommabile in n. Allora per Borel-Cantelli 2 si ha quasi certamente $n(1 + X_n) < \epsilon$ per infiniti indici n. Dunque $\liminf_{n\to\infty} n(1 + X_n) \leqslant \epsilon$ q.c. e poiché $X_n \geqslant -1$ e $\epsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo si ha $\liminf_{n\to\infty} n(1 + X_n) = 0$.

Nome:____