Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, I semestre
14 novembre, 2019

CP410: Esonero 1, 14 novembre, 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

1. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $\Omega = [1, \infty)$, $\mathcal{F}$ sono i boreliani di $[1, \infty)$ e $\mathbb{P}$ è la misura di probabilità su $[1, \infty)$ definita da:

$$\mathbb{P}(A) = \int_1^\infty x^{-2} 1_A(x) dx \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Siano X_k, per $k = 1, 2, \ldots$, le variabili aleatorie

$$X_k(\omega) = \omega^{-k}, \qquad \omega \in [1, \infty).$$

(a) Dire se le X_k sono indipendenti;

(b) Scrivere la funzione di distribuzione della variabile X_k per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(c) Dire se la successione X_k, $k \in \mathbb{N}$ converge quasi certamente.

Soluzione:
(a). Le X_k non sono indipendenti. Infatti per esempio

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_k] &= \int_1^\infty x^{-k} x^{-2} dx = \frac{1}{k+1}, \\ \mathbb{E}[X_k X_j] &= \int_1^\infty x^{-k-j} x^{-2} dx = \frac{1}{k+j+1} \neq \frac{1}{k+1} \frac{1}{j+1} = \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_j]. \end{aligned}$$

(b). Per definizione abbiamo $X_k(\omega) \in (0, 1]$, per ogni $\omega \geqslant 1$. Inoltre per ogni $t \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \mathbb{P}(X_k \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in [1, \infty) : \omega^{-k} \leqslant t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in [1, \infty) : \omega \geqslant t^{-1/k}\}) \\ &= \int_{t^{-1/k}}^\infty x^{-2} dx = t^{1/k}. \end{aligned}$$

In conclusione la v.a. X_k ha funzione di distribuzione

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ t^{1/k} & t \in (0, 1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

(c). Notiamo che se $\omega \in (1, \infty)$, allora $\omega^{-k} \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi $X_k \to 0$ q.c. per $k \to \infty$.

Nome:____

2. Sia X una variabile aleatoria. Mostrare che

   (a) Per ogni $p > 0$ si ha $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] = \int_0^\infty p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}(|X| > t)dt$

   (b) Dedurre che per ogni $p > 0$ si ha
   $$p\Gamma(p)^2 \leqslant 2\Gamma(2p),$$
   dove $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$.

Soluzione:
(a). Ricordiamo che per ogni v.a. Y non-negativa si ha

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > s)ds.$$

Allora ponendo $Y = |X|^p$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X|^p\right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X|^p > s)ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > s^{1/p})ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > s^{1/p})ps^{1-1/p}d(s^{1/p}) \\
&= \int_0^\infty p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}(|X| > t)dt
\end{aligned}$$

(b). Se X è la v.a. esponenziale di parametro 1 si ha $\mathbb{P}(|X| > t) = e^{-t}$ e dunque per la formula precedente

$$p\Gamma(p) = \mathbb{E}\left[X^p\right].$$

La disuguaglianza di Schwarz allora implica

$$p^2\Gamma(p)^2 = \mathbb{E}\left[X^p\right]^2 \leqslant \mathbb{E}\left[X^{2p}\right] = 2p\Gamma(2p),$$

che equivale a $p\Gamma(p)^2 \leqslant 2\Gamma(2p)$ per ogni $p > 0$.

Nome:______________________________________

3. Enunciare e dimostrare la legge $0 - 1$ di Kolmogorov.

Nome:______________________________________

4. Siano $Y_1, Y_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti tali che

$$Y_i = \begin{cases} 2 & \text{con probab. } \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{con probab. } \frac{2}{3} \end{cases}$$

Sia inoltre

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i \,.$$

a) Calcolare $\mathbb{E}[Z_n]$ per ogni n;

b) Dire se Z_n converge quasi certamente;

c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > 2^{-n/4})$.

Soluzione: (a). Osserviamo che $\mathbb{E}[Y_i] = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ e dunque per l'indipendenza si ha

$$\mathbb{E}[Z_n] = 1\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(b). Sia N_n il numero di $i \leqslant n$ tali che $Y_i = 2$. Possiamo scrivere

$$Z_n = 2^{N_n - (n - N_n)} = 2^{2N_n - n}.$$

Per la legge forte dei grandi numeri (per es. usando l'argomento con momento quarto) sappiamo che $\frac{1}{n} N_n \to \frac{1}{3}$ quasi certamente. Allora $2N_n - n \to -\infty$ quasi certamente. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0, \qquad \text{quasi certamente.}$$

(c). Notiamo che

$$\mathbb{P}(Z_n > 2^{-n/4}) = \mathbb{P}(2N_n - n > -n/4) = \mathbb{P}(N_n > 3n/8).$$

Poiché $3/8 > 1/3$ la legge dei grandi numeri (qui basta quella debole) implica

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > 2^{-n/4}) = 0.$$

Nome:______________________________________

5. Consideriamo infiniti lanci di una moneta equa. Sia T_k il tempo in cui si ottiene la k-esima testa e si considerino gli intervalli di tempo tra una testa e la successiva:

$$\Delta_k = T_k - T_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

dove poniamo $T_0 = 0$. Giustificare le seguenti affermazioni:

(a) le variabili aleatorie Δ_k, $k \in \mathbb{N}$ sono indipendenti, identicamente distribuite, con distribuzione geometrica di parametro $1/2$;

(b) quasi certamente $\liminf_{k\to\infty} \Delta_k = 1$;

(c) quasi certamente $\limsup_{k\to\infty} \frac{\Delta_k}{\log k} = \frac{1}{\log 2}$.

Soluzione: (a). E' sufficiente mostrare che per ogni n, per ogni scelta di interi $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{N}$ le prime n variabili $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ soddisfano

$$\mathbb{P}(\Delta_1 = \ell_1, \dots, \Delta_n = \ell_n) = \prod_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} = 2^{-K},$$

dove abbiamo posto $K = \sum_{j=1}^n \ell_j$. Per dimostrare la formula sopra, consideriamo i primi K lanci. L'evento $\Delta_1 = \ell_1, \dots, \Delta_n = \ell_n$ equivale a dire: i primi $\ell_1 - 1$ lanci sono croce, il lancio ℓ_1-esimo è testa, i successivi $\ell_2 - 1$ lanci sono croce, il lancio $(\ell_1 + \ell_2)$-esimo è testa, i successivi $\ell_3 - 1$ lanci sono croce, il lancio $(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)$-esimo è testa, e cosí via fino alla condizione che il lancio K-esimo è testa. Allora la formula desiderata diventa un'evidente conseguenza dell'indipendenza dei lanci e del fatto che ogni lancio ha probab. $1/2$ di essere testa o croce.

(b). E' sufficiente mostrare che $\{\Delta_k = 1, i.o.\}$ ha probabilità 1. Per l'indipendenza questo segue dal lemma di Borel-Cantelli 2 e dal fatto che $\mathbb{P}(\Delta_k = 1) = 1/2 > 0$.

(c). Sia $E_{n,\alpha}$ l'evento $\{\Delta_n > \lfloor \alpha \log n \rfloor\}$, dove $\lfloor \cdot \rfloor$ indica la parte intera. Allora

$$\mathbb{P}(E_{n,\alpha}) = 2^{-\lfloor \alpha \log n \rfloor}.$$

Osservando che $2^{-t} \leqslant 2^{-\lfloor t \rfloor} \leqslant 2^{-t+1}$ per ogni $t > 0$ si ha che $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(E_{n,\alpha}) < \infty$ se e solo se $\alpha > 1/\log(2)$. Dal lemma di Borel-Cantelli 1 segue allora che $\mathbb{P}(\{E_{n,\alpha}, \text{i.o.}\}) = 0$ e dunque q.c.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\alpha \log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\lfloor \alpha \log n \rfloor} \leqslant 1,$$

per ogni $\alpha > 1/\log(2)$ fissato. Allora si deve avere anche q.c.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\log n} \leqslant \frac{1}{\log(2)}. \tag{1}$$

D'altra parte per il lemma di Borel-Cantelli 2 si ha che $\mathbb{P}(\{E_{n,\alpha}, \text{i.o.}\}) = 1$ e dunque q.c.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\alpha \log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\lfloor \alpha \log n \rfloor} \geqslant 1,$$

per ogni $\alpha \leqslant 1/\log(2)$. E dunque ponendo $\alpha = 1/\log(2)$ otteniamo $\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{\log n} \geqslant 1/\log(2)$, che insieme a (1) conclude la dimostrazione.

Nome:____