Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2014-15, I semestre
23 dicembre, 2014

CP410: Esonero 2, 23 dicembre 2014

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Dare la definizione del valore atteso $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ di una variabile aleatoria X condizionato a una sotto sigma-algebra $\mathcal{G}$. Dimostrare che $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X]$. Illustrare con un esempio.

Nome:________________________________

2. Siano X_i variabili aleatorie i.i.d. con funzione di distribuzione

$$F(x) = (1 - e^{-x})1_{x>0}.$$

Sia $M_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)$.

(a) Scrivere la funzione caratteristica della variabile M_n.

(b) Mostrare che $n^{-\alpha}M_n$ converge in distribuzione per ogni $\alpha \geqslant 1/2$ e descriverne il limite.

Soluzione: Si ha

$$\varphi_{M_n}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta M_n}] = \mathbb{E}[e^{i\theta(X_1-1)}]^n = \varphi_{X_1-1}(\theta)^n.$$

La variabile X_1 ha funzione di distribuzione $F(x) = (1 - e^{-x})1_{x>0}$ e dunque è un'esponenziale di parametro 1. Allora $\varphi_{X_1-1}(\theta) = e^{-i\theta}(1 - i\theta)^{-1}$.

Poiché X_1 ha media 1 e varianza 1 si ha lo sviluppo in serie intorno a $\theta = 0$:

$$\varphi_{X_1-1}(\theta) = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + o(\theta^2).$$

Allora, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ fissato:

$$\varphi_{n^{-\alpha}M_n}(\theta) = \varphi_{X_1-1}(n^{-\alpha}\theta)^n = (1 - \tfrac{1}{2}\,n^{-2\alpha}\theta^2 + o(n^{-2\alpha}))^n.$$

Se $\alpha > 1/2$ si ha $\varphi_{n^{-\alpha}M_n}(\theta) \to 1$, e dunque $n^{-\alpha}M_n$ converge in distribuzione alla variabile aleatoria identicamente uguale a zero.

Se $\alpha = 1/2$ si ha $\varphi_{n^{-\alpha}M_n}(\theta) \to e^{-\frac{1}{2}\theta^2}$, ossia $n^{-\alpha}M_n$ converge in distribuzione alla variabile aleatoria normale standard.

Nome:____

3. Siano Y_k variabili aleatorie indipendenti tali che $Y_k = \frac{1}{k^2-1}$ con probabilità $1 - \frac{1}{k^2}$, e $Y_k = k^2 - 1$ con probabilità $\frac{1}{k^2}$. Sia

$$M_n = \prod_{k=2}^{n} Y_k.$$

   (a) Dire se M_n converge quasi certamente.

   (b) Dire se M_n converge in L^1.

Soluzione: Le Y_k sono indipendenti, $Y_k \geqslant 0$ e $\mathbb{E}[Y_k] = 1$. Allora M_n è una martingala limitata in L^1. Dunque M_n converge quasi certamente. Per il lemma di Borel-Cantelli sappiamo che $Y_k = k^2 - 1$ solo per un numero finito di indici k quasi certamente e dunque $M_n \to 0$ quasi certamente. Allora M_n non può convergere in L^1, essendo $\mathbb{E}M_n = 1$ per ogni n.

Nome:______________________________________

4. Siano X_i variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme su $\{-2,+2\}$, e sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$. Per $k \in \mathbb{N}$ fissato definiamo

$$\tau_k = \inf\{n \geqslant 1 : \ |S_n| = 2k\}.$$

Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[\tau_k]$.

Soluzione:

Sia $Q_n = S_n^2 - 4n$, e osserviamo che Q_n è una martingala. Infatti $Q_{n+1} - Q_n = 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 - 4$, e prendendo il valore atteso condizionato alla sigma-algebra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ si ha

$$\mathbb{E}[Q_{n+1} - Q_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 4 = 0.$$

Allora essendo $Q_{n\wedge\tau_k}$ dominata dalla variabile integrabile $k^2 + 4\tau_k$, si può passare al limite in $\mathbb{E}[Q_{n\wedge\tau_k}] = 0$ e ottenere

$$\mathbb{E}[\tau_k] = \tfrac{1}{4}\,\mathbb{E}[S_{\tau_k}^2] = k^2.$$

Nome:____

5. Enunciare e fornire cenni di dimostrazione del Teorema del Limite Centrale

Nome:____