Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2015-16, I semestre
22 dicembre, 2015

CP410: Esonero 2, 22 dicembre 2015

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria in $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valore atteso $\mathbb{E}[X] = 0$. Sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sotto sigma-algebra.

   (a) Dimostrare che $Y = X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ e $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ sono ortogonali in L^2.

   (b) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2 + Z^2 - X^2]$.

Soluzione: a). Si ha

$$\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right] - \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\right] = 0,$$

dove abbiamo usato l'identità $\mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right] = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\right]$, che segue dal fatto che se $U, V \in L^2$ con V è $\mathcal{G}$-misurabile, allora

$$\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[U|\mathcal{G}\right] V\right].$$

Quindi Y, Z sono ortogonali in L^2.

b). Per il punto a) abbiamo $\mathbb{E}[Y^2 + Z^2] = \mathbb{E}[(Y + Z)^2]$. Inoltre $Y + Z = X$. Allora

$$\mathbb{E}[Y^2 + Z^2 - X^2] = \mathbb{E}[Y^2 + Z^2] - \mathbb{E}[X^2] = 0.$$

Nome:____

2. Siano $\{Z_i,\, i = 1, 2, \dots\}$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $Z_i = 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ rispettivamente. Per $a, b, c \in \{0, 1\}$, sia τ_{abc} il primo tempo in cui appare la sequenza abc, ossia τ_{abc} è il primo indice $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 3$, tale che $(Z_{i-2}, Z_{i-1}, Z_i) = (a, b, c)$.

   Calcolare

   (a) $\mathbb{E}[\tau_{010}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{111}]$;

   (b) $\mathbb{P}(\tau_{010} > \tau_{111})$;

Soluzione: Sia $X_n = \sum_{i=1}^n (2Z_i - 1)$, con $X_0 = 0$. X_n è una martingala. Fissiamo $a, b, c \in \{0, 1\}$. Costruiamo ora una nuova martingala $M_n^{(abc)}$ per calcolare il valore atteso di $\mathbb{E}[\tau_{abc}]$, ottenuta modificando X_n tramite un processo prevedibile.
Definiamo $\varepsilon_a := 2a - 1$, per ogni $a \in \{0, 1\}$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$C_k^{(j)} = \begin{cases} 0 & k < j \text{ oppure } k > j+2 \\ \varepsilon_a & k = j \\ 2\varepsilon_b 1_{Z_{k-1}=a} & k = j+1 \\ 4\varepsilon_c 1_{Z_{k-2}=a} 1_{Z_{k-1}=b} & k = j+2 \end{cases}$$

Allora

$$M_n^{(abc)} := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} C_k^{(j)} (X_k - X_{k-1}), \qquad M_0 = 0,$$

definisce una martingala.
Inoltre $M_{\tau_{010}}^{(010)} = 2^3 + 2 - \tau_{010}$, mentre $M_{\tau_{111}}^{(111)} = 2^3 + 2^2 + 2 - \tau_{111}$. Allora per il teorema di optional stopping si ha

$$\mathbb{E}[\tau_{010}] = 10, \qquad \mathbb{E}[\tau_{111}] = 14.$$

Consideriamo ora la martingala $M_n := M_n^{(111)} - M_n^{(010)}$. Siat $\tau := \min\{\tau_{010}, \tau_{111}\}$. Notiamo che se $\tau = \tau_{010}$ allora $M_\tau = 2^3 + 2 = 10$, mentre se $\tau = \tau_{111}$ allora $M_\tau = -2^3 - 2^2 - 2 = 14$. Dunque per il teorema di optional stopping si ha

$$0 = \mathbb{E}[M_\tau] = 10\mathbb{P}(\tau = \tau_{010}) - 14\mathbb{P}(\tau = \tau_{111}).$$

Se $p = \mathbb{P}(\tau_{010} > \tau_{111})$, allora $\mathbb{P}(\tau = \tau_{010}) = 1 - p$ e $\mathbb{P}(\tau = \tau_{111}) = p$. Allora $14p - 10(1 - p) = 0$. Ne segue

$$\mathbb{P}(\tau_{010} > \tau_{111}) = 5/12 \approx 0.417.$$

In maniera analoga si può mostrare per esempio che

$$\mathbb{P}(\tau_{011} > \tau_{111}) = 1/8 = 0.125, \qquad \mathbb{P}(\tau_{011} > \tau_{110}) = 1/4.$$

Osserviamo che considerazioni di simmetria potrebbero erroneamente indurre a credere che $\mathbb{P}(\tau_{011} > \tau_{110})$ *è pari a* $1/2$*. Il fatto che* $\mathbb{P}(\tau_{011} > \tau_{110}) = 1/4$ *puo' risultare particolarmente sorprendente se consideriamo che* $\mathbb{E}[\tau_{011}] = \mathbb{E}[\tau_{110}] = 8$*. Per simmetria invece possiamo senza dubbio asserire che*

$$\mathbb{P}(\tau_{011} > \tau_{100}) = 1/2.$$

Nome:______________________________________

3. Siano X, Y variabili i.i.d. con densità di probabilità

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Scrivere la funzione caratteristica di $X+Y$.

b) Scrivere la funzione caratteristica di $X+Y^{-1}$.

Soluzione: a). Se $\varphi(\theta)$ è la funzione caratteristica di X e Y, allora per l'indipendenza

$$\mathbb{E}[e^{i\theta(X+Y)}] = \varphi(\theta)^2,$$

è la funzione caratteristica di $X+Y$. Inoltre ricordando che $f(t)$ è la densità di una variabile di Cauchy, o calcolando esplicitamente la trasformata di Fourier di $f(t)$ si ha $\varphi(\theta) = e^{-|\theta|}$, e dunque

$$\mathbb{E}[e^{i\theta(X+Y)}] = e^{-2|\theta|}.$$

b). Scriviamo

$$\mathbb{E}[e^{i\theta(X+Y^{-1})}] = \mathbb{E}[e^{i\theta X}]\mathbb{E}[e^{i\theta Y^{-1}}] = \varphi(\theta)\mathbb{E}[e^{i\theta Y^{-1}}].$$

Inoltre

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y^{-1}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta/y} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy$$

Cambiando variabile con $z = 1/y$ si ha

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y^{-1}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta z} \frac{1}{\pi(1+z^2)}\, dz = \varphi(\theta).$$

Dunque Y^{-1} è di nuovo variabile di Cauchy e $\mathbb{E}[e^{i\theta(X+Y^{-1})}] = e^{-2|\theta|}$.

Nome:____

4. Sia $\{S_n\}$ la passeggiata aleatoria asimmetrica su $\mathbb{Z}$, con $S_0 = 0$ e con $Z_n := S_{n+1} - S_n$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $Z_n = 1$ con probabilità $2/3$ e $Z_n = -1$ con probabilità $1/3$. Per $k \in \mathbb{Z}$ fissato definiamo
$$\tau_k = \inf\{n \geqslant 0 : \; S_n = k\}.$$
Sia inoltre $\hat{\tau}_0$ il tempo di primo ritorno nell'origine:
$$\hat{\tau}_0 = \inf\{n \geqslant 1 : \; S_n = 0\}.$$
(a) Calcolare $\mathbb{P}(\tau_3 < \tau_{-3})$.
(b) Calcolare $\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0)$.

Soluzione: a). Sia $q = 1 - p$. Sappiamo che $M_n = (q/p)^{S_n}$ è una martingala, con $M_0 = 1$. Per $\tau = \min\{\tau_3, \tau_{-3}\}$, sia $\rho = \mathbb{P}(\tau = \tau_3)$. Poiché $M_{n\wedge\tau}$ è limitata, per l'optional stopping si ha
$$1 = \mathbb{E}[M_\tau] = \rho(q/p)^3 + (1-\rho)(q/p)^{-3}.$$
Allora
$$\mathbb{P}(\tau_3 < \tau_{-3}) = \rho = \frac{1 - (q/p)^{-3}}{(q/p)^3 - (q/p)^{-3}} = \frac{56}{63} = 0.88...$$
b). Notiamo che
$$\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0) = p\,\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0 | S_1 = 1) + q\,\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0 | S_1 = -1).$$
Inoltre $\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0 | S_1 = -1) = 0$ essendo necessario passare per 0 per arrivare in 3 se si parte da -1. Per il calcolo di $\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0 | S_1 = 1)$ osserviamo che, per traslazione, se condizioniamo a $S_1 = 1$ abbiamo che l'evento $\{\tau_3 < \hat{\tau}_0\}$ ha la stessa probabilità dell'evento $\{\tau_2 < \tau_{-1}\}$ senza condizionamento. Ragionando come sopra sappiamo che
$$\mathbb{P}(\tau_2 < \tau_{-1}) = \frac{1 - (q/p)^{-1}}{(q/p)^2 - (q/p)^{-1}} = \frac{4}{7}.$$
In conclusione
$$\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0) = p\,\mathbb{P}(\tau_3 < \hat{\tau}_0 | S_1 = 1) = p\,\frac{4}{7} = \frac{8}{21} \approx 0.381.$$

Nome:____

5. Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri forte per variabili indipendenti con momento secondo limitato

Nome:____