Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, I semestre
23 dicembre, 2016

CP410: Esonero 2, 23 dicembre 2016

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Siano X_i variabili aleatorie i.i.d. tali che $X_i = \pm 1$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Sia a_n una successione numerica tale che $\sigma^2 := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

   (a) Dimostrare che $Y_n := \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ converge q.c.

   (b) Dimostrare che
   $$\mathbb{P}\left(Y_n \geqslant 2\sigma\right) \leqslant \frac{1}{4}$$

Soluzione: a). Notiamo che Y_n è una somma di variabili aleatorie indipendenti, integrabili e con media nulla. Quindi Y_n è una martingala, rispetto alla filtrazione naturale. Inoltre

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sigma^2 < \infty.$$

Dunque Y_n è limitata in L^2 (uniformemente in n). Per il teorema di Doob allora Y_n converge q.c. (e anche in L^2).

b). Per la disuguaglianza di Markov abbiamo:

$$\mathbb{P}\left(Y_n \geqslant 2\sigma\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Y_n^2 \geqslant 4\sigma^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{4\sigma^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Nome:____

2. Siano $\{Z_i,\, i = 1, 2, \dots\}$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $Z_i = 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ rispettivamente. Per $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1\}$ fissati, sia $\tau_{a_1a_2a_3a_4}$ il primo tempo in cui appare la sequenza $a_1a_2a_3a_4$, ossia il primo indice $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 4$, tale che $(Z_{i-3}, Z_{i-2}, Z_{i-1}, Z_i) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Calcolare:

   (a) i valori attesi $\mathbb{E}[\tau_{0001}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{0000}]$;

   (b) la probabilità $\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000})$;

Soluzione: Sia $j \geqslant 0$ intero. Costruiamo la martingala $X_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n W_i^{(j)}$, dove

$$W_i^{(j)} = \begin{cases} 2\,1_{\{Z_i = a_k\}} - 1 & \text{se } j < i = j + k \leqslant j + 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché $W_i^{(j)}$, $i \in \mathbb{N}$, hanno media nulla e sono indipendenti, si ha che $X^{(j)}$ è una martingala, con $X_0^{(j)} = 0$. Ora costruiamo la strategia, ossia il processo prevedibile $C_i^{(j)}$, $i \in \mathbb{N}$:

$$C_i^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \leqslant j \\ 1 & \text{se } i = j + 1 \\ 2\,1_{\{Z_{j+1} = a_1\}} & \text{se } i = j + 2 \\ 2^2\,1_{\{Z_{j+1} = a_1\}} 1_{\{Z_{j+2} = a_2\}} & \text{se } i = j + 3 \\ 2^3\,1_{\{Z_{j+1} = a_1\}} 1_{\{Z_{j+2} = a_2\}} 1_{\{Z_{j+3} = a_3\}} & \text{se } i = j + 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A questo punto formiamo la martingala

$$M_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n C_i^{(j)} W_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n C_i^{(j)} (X_i^{(j)} - X_{i-1}^{(j)}),$$

con $M_0^{(j)} = 0$. L'interpretazione è che $M_n^{(j)}$ rappresenta la vincita netta al tempo n del giocatore che arriva al tempo j, e comincia a giocare al tempo $j + 1$. La martingala totale associata a tutti i giocatori è definita da

$$M_n = \sum_{j=0}^{\infty} M_n^{(j)}.$$

Notiamo che se $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 1)$, allora al tempo τ_{0001} si ha

$$M_{\tau_{0001}} = 2^4 - \tau_{0001}.$$

Ripetiamo ora la costruzione precedente per il caso $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 1)$, e chiamiamo M_n' la martingala totale associata. Al tempo τ_{0000} si ha $M'_{\tau_{0000}} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 - \tau_{0001}$. Il teorema di optional stopping allora implica

$$\mathbb{E}[\tau_{0001}] = 2^4 = 16\,, \qquad \mathbb{E}[\tau_{0000}] = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30.$$

(b). Per il calcolo di $\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000})$, utilizziamo la nuova martingala $\bar{M}_n = M_n - M_n'$. Sia $\tau := \min\{\tau_{0001}, \tau_{0000}\}$. Osserviamo che se $\tau = \tau_{0001}$, allora $M_\tau = 2^4 - \tau$ e $M'_\tau = -\tau$, quindi

$\bar{M}_\tau = 2^4$. Se invece $\tau = \tau_{0000}$, allora $M_\tau = 2^3 + 2^2 + 2 - \tau$ e $M'_\tau = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 - \tau$, quindi $\bar{M}_\tau = -2^4$. Per optional stopping si ha $\mathbb{E}[\bar{M}_\tau] = 0$. In conclusione:

$$0 = \mathbb{E}[\bar{M}_\tau] = -24\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000}) + 24\mathbb{P}(\tau_{0000} > \tau_{0001}).$$

Allora

$$\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000}) = \mathbb{P}(\tau_{0000} > \tau_{0001}).$$

Poiché $\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000}) + \mathbb{P}(\tau_{0000} > \tau_{0001}) = 1$, ne segue che $\mathbb{P}(\tau_{0001} > \tau_{0000}) = \frac{1}{2}$.
Il risultato è intuitivamente evidente, poiché per avere 0000 oppure 0001 bisogna avere prima 000 e una volta ottenuta questa stringa, la probabilità di avere la prima o la seconda è la stessa. Inoltre osserviamo che il tempo τ definito sopra deve soddisfare anche $\tau = \tau_{000} + 1$, e dunque si ha $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[\tau_{000}] + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$.

Nome:______________________________________

3. Sia X la variabile aleatoria con funzione caratteristica

$$\varphi(\theta) = e^{-|\theta|}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

   a) Scrivere la densità di probabilità di X

   b) Dimostrare che X coincide con la variabile aleatoria $\tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$, dove U è la variabile aleatoria uniforme in $[0, 1]$.

Soluzione: a). Essendo $\varphi \in L^1$ si ha che X ha densità di probabilità pari a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} \varphi(\theta) d\theta.$$

Calcolando l'integrale si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b). Notiamo che

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) dx = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \arctan(t)$$

Se $X' = \tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$, allora $X' \leqslant t$ equivale a $\pi(U - \frac{1}{2}) \leqslant \arctan(t)$, e dunque

$$\mathbb{P}(X' \leqslant t) = \mathbb{P}(\pi(U - \tfrac{1}{2}) \leqslant \arctan(t)) = \mathbb{P}(U \leqslant \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \arctan(t)) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \arctan(t).$$

Allora $\mathbb{P}(X' \leqslant t) = F(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque X e X' sono la stessa variabile aleatoria.

Nome:______________________________________

4. Sia X la variabile aleatoria tale che: $X = 2$ con probabilità $\frac{2}{5}$, $X = -2$ con probabilità $\frac{1}{10}$, $X = 1$ con probabilità $\frac{1}{3}$ e $X = -1$ con probabilità $\frac{1}{6}$. Siano X_i variabili aleatorie i.i.d. con la stessa distribuzione di X e sia S_n la passeggiata aleatoria corrispondente: $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Dimostrare che $M_n = 2^{-S_n}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale

   (b) Dimostrare che M_n converge q.c. e calcolarne il limite

   (c) Sia τ il primo tempo n tale che $S_n \geqslant 2$. Dimostrare che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. E' possibile usare il teorema di optional stopping per calcolare $\mathbb{E}[M_\tau]$?

Soluzione: a). Osserviamo che

$$\mathbb{E}[2^{-X}] = 2^{-2}\tfrac{2}{5} + 2^2\tfrac{1}{10} + 2^{-1}\tfrac{1}{3} + 2\tfrac{1}{6} = 1.$$

Allora $M_n = 2^{-X_1-\cdots-X_n}$ è martingala limitata in L^1, con $\mathbb{E}[M_n] = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b). In particolare, M_n converge q.c. Inoltre per la legge dei grandi numeri forte si ha q.c.

$$n^{-1}S_n \to \mu = \mathbb{E}[X] = 2\tfrac{2}{5} - 2\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{23}{30}.$$

Ne segue che $S_n \to \infty$, e dunque $M_n \to 0$, q.c.

c). Si può notare che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Per esempio, a tal fine si può osservare che se $\tau > k$ allora necessariamente $S_k < 2$, per ogni k. Pertanto, per k abbastanza grande si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > k) &\leqslant \mathbb{P}(S_k < 2) = \mathbb{P}(S_k - \mu k < 2 - \mu k) \leqslant \mathbb{P}(S_k - \mu k < -\tfrac{1}{2}\mu k)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|S_k - \mu k| > \tfrac{1}{2}\mu k) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(S_k - \mu k)^4}{\mu^4 k^4},\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Markov. Ora, sappiamo che $\mathbb{E}[(S_k - \mu k)^4 \leqslant Ck^2$ per qualche costante $C > 0$. Allora $\mathbb{P}(\tau > k)$ è stimata da $C\mu^{-4}k^{-2}$. Dunque $\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(\tau \geqslant k) < \infty$.

Notiamo che non si può usare l'optional stopping per calcolare $\mathbb{E}[M_\tau]$ poiché altrimenti si avrebbe $1 = \mathbb{E}[M_\tau]$, ma anche $M_\tau = 2^{-S_\tau} \leqslant 2^{-2}$ q.c., che è impossibile. In effetti, nessuna delle condizioni sufficienti nel teorema di optional stopping è soddisfatta in questo caso.

Nome:____

5. Enunciare il teorema del limite centrale e fornire cenni di dimostrazione.

Nome:____