Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2017-18, I semestre
21 dicembre, 2017

# CP410: Esonero 2, 21 dicembre 2017

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Firma | |

Nome:______________________________________

1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità, e sia $X$ una variabile aleatoria con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Sia $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots$ una successione crescente di sotto $\sigma$-algebre di $\mathcal{F}$. Dimostrare che:

   (a) $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$.

   (b) $M_n$ converge quasi certamente.

**Soluzione:** a). Per definizione di attesa condizionata abbiamo che $M_n \in L^1$ per ogni $n$ e che $M_n$ è $\mathcal{F}_n$-misurabile, e dunque adattata alla filtrazione. Inoltre per la proprietà della torre si ha

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

Dunque $M_n$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$.

b). Osserviamo che

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]| \leqslant \mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{F}_n],$$

per la disuguaglianza di Jensen. Allora:

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{F}_n]\,\right] = \mathbb{E}[\,|X|\,] < \infty. \tag{1}$$

La stima (1) mostra che $M_n$ è limitata in $L^1$:

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\,|M_n|\,\right] \leqslant \mathbb{E}[\,|X|\,] < \infty.$$

Allora per il teorema di convergenza per martingale limitate in $L^1$ si ha che esiste una variabile aleatoria $M_\infty \in L^1$ tale che $M_n \to M_\infty$ quasi certamente.

Nome:______________________________________

2. Enunciare e dimostrare il teorema di optional stopping per martingale.

Nome:________________________________________

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $X_n$ la variabile aleatoria con funzione caratteristica

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \frac{1}{(1 - i\theta)^n}\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che per $n \to \infty$:

(a) $\frac{1}{n}(X_n - n)$ converge a zero in probabilità.

(b) $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_n - n)$ converge alla normale standard in distribuzione.

**Soluzione:** Per $n = 1$ notiamo che

$$\varphi_{X_1}(\theta) = \frac{1}{(1 - i\theta)} = \int_0^\infty e^{i\theta x} e^{-x} dx.$$

Allora $X_1$ è la variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Dunque $\varphi_{X_n}(\theta) = (\varphi_{X_1}(\theta))^n$ è la funzione caratteristica della somma di $n$ variabili esponenziali di parametro 1 indipendenti. Ne segue che $X_n - n$ è la somma di $n$ variabili indipendenti di media zero e varianza 1.
Allora la legge dei grandi numeri debole implica a), e il teorema del limite centrale implica b).

Nome:______________________________________

4. Sia $p \in [0,1]$, e sia $X$ la variabile aleatoria tale che $X = 1$ con probabilità $p$, e $X = -2$ con probabilità $1-p$. Siano $X_i$ variabili aleatorie i.i.d. con la stessa distribuzione di $X$ e sia $S_n$ la passeggiata aleatoria corrispondente:

$$S_0 = 0\,, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Sia $\tau$ il primo $n \geqslant 0$ in cui $S_n = 1$.

(a) Per quali valori di $p$ si ha $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ ?

(b) Calcolare $\mathbb{E}[\tau]$ quando $p$ è tale che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

**Soluzione:** a). Osserviamo che per $\mathbb{E}[X] = p - 2(1-p) = 3p - 2$. Dunque per $p > 2/3$ la passeggiata ha tendenza a crescere mentre per $p < 2/3$ ha tendenza a decrescere. Infine per $p = 2/3$ si ha un comportamento simmetrico. Dunque ci aspettiamo che

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty \quad \text{ se e solo se } \quad p > 2/3.$$

Passiamo ora alla dimostrazione.

Caso $p > 2/3$. Si può osservare che se $\tau > k$ allora necessariamente $S_k \leqslant 0$, per ogni $k$. Pertanto, per $k$ abbastanza grande si ha, con $a = 3p - 2 > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > k) \leqslant \mathbb{P}(S_k \leqslant 0) &= \mathbb{P}(S_k - ak \leqslant\, -ak) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|S_k - ak| \geqslant ak) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(S_k - ak)^4]}{a^4 k^4},\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Markov. Sappiamo inoltre che $\mathbb{E}[(S_k - ak)^4 \leqslant Ck^2$ per qualche costante $C > 0$. Allora $\mathbb{P}(\tau > k)$ è stimata da $Ca^{-4}k^{-2}$. Dunque $\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(\tau > k) < \infty$.

Caso $p \leqslant 2/3$. Osserviamo che $M_n = S_n - an$ è una martingala, con $a = 3p - 2 \leqslant 0$. Inoltre $M_n$ ha incrementi limitati. Allora per il teorema di optional stopping, se fosse $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, si avrebbe

$$\mathbb{E}[M_\tau] = 0 \quad \Rightarrow \quad a\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[S_\tau] = 1,$$

dove abbiamo usato $S_\tau = 1$ (se assumiamo $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ allora $\tau < \infty$ q.c. e dunque $S_\tau = 1$ q.c.). Dunque si avrebbe l'assurdo $1 \leqslant 0$.

b) Per quanto visto sopra, se $p > 2/3$ possiamo concludere che

$$\mathbb{E}[M_\tau] = 0 \quad \Rightarrow \quad a\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[S_\tau] = 1 \quad \Rightarrow \mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{a} = \frac{1}{3p-2}.$$

Nome:________________________________________

5. Un generatore di numeri casuali produce una successione di bit ben approssimata da una successione $X_1, X_2, \ldots$ di variabili aleatorie iid tali che $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{2}{3}$. Siano $\tau_{11}, \tau_{00}$ il numero di bit necessari per vedere per la prima volta due 1 consecutivi e due 0 consecutivi rispettivamente. Calcolare:

   (a) $\mathbb{E}[\tau_{11}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{00}]$

   (b) $\mathbb{P}(\tau_{11} > \tau_{00})$

**Soluzione:** (a). Sia $p = 2/3$. Per mostrare che $\tau_{11}, \tau_{00}$ hanno media finita si puo' usare un argomento di dominazione tramite variabili geometriche. In particolare $\mathbb{E}[\tau_{11}] \leqslant 2 \times (p^2)^{-1} < \infty$ e $\mathbb{E}[\tau_{00}] \leqslant 2 \times [(1-p)^2]^{-1} < \infty$. Avendo stabilito questo, tramite gli usuali argomenti di martingala - optional stopping applicato a un opportuna martingala $M^{(11)}$ per $\tau_{11}$ e $M^{(00)}$ per $\tau_{00}$ - si ottiene

$$\mathbb{E}[\tau_{11}] = p^{-2} + p^{-1} = \frac{15}{4}, \quad \mathbb{E}[\tau_{00}] = (1-p)^{-2} + (1-p)^{-1} = 12.$$

(b). Sia $M^{(11)}$ la martingala associata a $\tau_{11}$ e $M^{(00)}$ quella associata $\tau_{00}$ come nel punto a) sopra. Allora la martingala $Q_n = M_n^{(11)} - M_n^{(00)}$, per il teorema di optional stopping, soddisfa

$$\mathbb{E}[Q_{\tau_{11} \wedge \tau_{00}}] = 0,$$

dove $\tau_{11} \wedge \tau_{00}$ indica il minimo dei due tempi. Inoltre per costruzione si ha

$$Q_{\tau_{11} \wedge \tau_{00}} = (p^{-2} + p^{-1}) 1_{\tau_{11} < \tau_{00}} - ((1-p)^{-2} + (1-p)^{-1}) 1_{\tau_{11} > \tau_{00}}.$$

Ne segue che

$$0 = \mathbb{E}[Q_{\tau_{11} \wedge \tau_{00}}] = \mathbb{P}(\tau_{11} < \tau_{00})(p^{-2} + p^{-1}) - (1 - \mathbb{P}(\tau_{11} < \tau_{00}))((1-p)^{-2} + (1-p)^{-1})$$

Risolvendo si ha

$$\mathbb{P}(\tau_{11} < \tau_{00}) = \frac{12}{12 + \frac{15}{4}} = \frac{16}{21}.$$

In conclusione $\mathbb{P}(\tau_{11} > \tau_{00}) = 1 - \mathbb{P}(\tau_{11} < \tau_{00}) = \frac{5}{21}$.

Nome:________________________________________