CP410: Esonero 2, 20 dicembre 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome: _____

1. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Sia $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $Y_0, Y_1, \dots$ il processo stocastico definito da

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Per ciascuno dei seguenti casi, dire per quali $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il processo stocastico M_n è una martingale rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$:

- (a) $M_n = Y_n + \alpha n + \beta$
- (b) $M_n = (Y_n - \alpha n)^2 + \beta n$
- (c) $M_n = \exp\{Y_n + \alpha n + \beta\}$

Soluzione: a). Si ha

$$M_{n+1} - M_n = \alpha + Y_{n+1} - Y_n = \alpha + X_{n+1}.$$

Allora

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = \alpha + \mathbb{E}[X_{n+1}] = \alpha + \frac{1}{2}.$$

Dunque M_n è una martingala se $\alpha = -\frac{1}{2}$, e per tutti i valori di β .

b). Si ha

$$M_{n+1} - M_n = (X_{n+1} - \alpha)^2 + 2(Y_n - \alpha n)(X_{n+1} - \alpha) + \beta.$$

Dunque la condizione di martingala $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = 0$ equivale a

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - \alpha)^2] + 2(Y_n - \alpha n)\mathbb{E}[X_{n+1} - \alpha] + \beta = 0.$$

Allora si deve avere $\alpha = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 1/2$ e $\beta = -\mathbb{E}[(X_{n+1} - 1/2)^2] = -\text{Var}[X_{n+1}] = -\frac{1}{12}$.

c). Si ha

$$M_{n+1} - M_n = M_n e^{X_{n+1} + \alpha}.$$

Dunque la condizione di martingala $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = 0$ equivale a

$$\alpha = -\log \mathbb{E}[e^{X_{n+1}}] = -\log \int_0^1 e^x dx = -\log(e - 1),$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Nome: _____

2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per martingale limitate in L^1 .

Nome: _____

3. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, siano X_k , $k = 1, 2, \dots$, variabili aleatorie indipendenti con funzione caratteristica

$$\varphi_{X_k}(\theta) = \exp\{-2^{-(k+1)}\theta^2\}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

e sia $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Dimostrare che per $n \rightarrow \infty$:

- (a) Y_n converge in distribuzione e descriverne il limite.
(b) $\frac{1}{n}Y_n$ converge a zero quasi certamente.

Soluzione: a) Notiamo che X_k è una normale di media zero e varianza 2^{-k} . Inoltre

$$\varphi_{Y_n}(\theta) = \prod_{k=1}^n \exp\{-2^{-(k+1)}\theta^2\} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^n 2^{-(k+1)}\theta^2\right\} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\theta^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

dove usiamo $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Allora Y_n converge in distribuzione alla normale standard $N(0, 1)$.

b) Per il lemma di Borel-Cantelli 1 è sufficiente mostrare che $\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon n) < \infty$ per ogni $\epsilon > 0$. Questo segue per esempio da

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon n) = \mathbb{P}(Y_n^2 > \epsilon^2 n^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{\epsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n 2^{-k}}{\epsilon^2 n^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^2}.$$

In alternativa, si può usare la legge forte dei grandi numeri per v.a. indipendenti non identicamente distribuite X_k tali che $\sum_k \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < \infty$.

Nome: _____

4. Sia $p = 2/3$, e siano X_i variabili aleatorie i.i.d. tali che $X_i = 1$ con probabilità p , e $X_i = -1$ con probabilità $1 - p$. Sia S_n la passeggiata aleatoria corrispondente:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se τ è il primo $n \geq 1$ in cui $|S_n| \geq 3$.

- (a) Calcolare la probabilità $\mathbb{P}(S_\tau > 0)$
(b) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[\tau]$.

Soluzione:

a). Ricordiamo che il processo

$$M_0 = 1, \quad M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},$$

è una martingala. Inoltre $M_{n \wedge \tau}$ è limitata, e dunque vale il teorema di optional stopping:

$$1 = \mathbb{E}[M_\tau] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 \mathbb{P}(S_\tau = 3) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-3} (1 - \mathbb{P}(S_\tau = 3)).$$

Da cui deduciamo che

$$\mathbb{P}(S_\tau = 3) = (b - 1)/(b - 1/b) = 56/63,$$

dove $b = (p/(p - 1))^3 = 8$.

b) Sappiamo che $Q_0 = 0$, $Q_n = S_n - \frac{1}{3}n$ è una martingala. Inoltre ha incrementi limitati e τ è in L^1 dunque vale il teorema di optional stopping:

$$0 = \mathbb{E}[Q_\tau] \Rightarrow \mathbb{E}[\tau] = 3\mathbb{E}[S_\tau].$$

Ma $\mathbb{E}[S_\tau] = 3\mathbb{P}(S_\tau = 3) - 3(1 - \mathbb{P}(S_\tau = 3)) = 56/21 - 7/21 = 7/3$. Allora

$$\mathbb{E}[\tau] = 7.$$

Nome: _____

5. Un dado a 6 facce viene lanciato ripetutamente. Sia τ_{123} il numero di lanci necessario per ottenere per la prima volta la stringa 123. Analogamente, sia τ_{234} il numero di lanci necessario per ottenere per la prima volta la stringa 234. Calcolare:

- (a) i valori medi $\mathbb{E}[\tau_{123}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{234}]$
- (b) la probabilità $\mathbb{P}(\tau_{123} > \tau_{234})$

Soluzione: (a). Gli argomenti usuali di martingala mostrano che

$$\mathbb{E}[\tau_{123}] = \mathbb{E}[\tau_{234}] = 6^3 = 216$$

(b). Sia $M^{(123)}$ la martingala associata a τ_{123} e $M^{(234)}$ quella associata a τ_{234} come nel punto a) sopra e sia

$$\tau = \tau_{123} \wedge \tau_{234}$$

il minimo dei due tempi. Allora la martingala $Q_n = M_n^{(123)} - M_n^{(234)}$, per il teorema di optional stopping, soddisfa

$$\mathbb{E}[Q_\tau] = 0.$$

Inoltre per costruzione si ha

$$Q_\tau = (6^3 - 6^2)1_{\tau_{123} < \tau_{234}} - 6^3 1_{\tau_{123} > \tau_{234}}.$$

Ne segue che

$$0 = \mathbb{E}[Q_\tau] = (6^3 - 6^2)\mathbb{P}(\tau_{123} < \tau_{234}) - 6^3(1 - \mathbb{P}(\tau_{123} < \tau_{234}))$$

Risolvendo si ha

$$\mathbb{P}(\tau_{123} < \tau_{234}) = \frac{6^3}{26^3 - 6^2} = \frac{216}{432 - 36} = \frac{6}{11}, \quad \mathbb{P}(\tau_{123} > \tau_{234}) = \frac{5}{11}.$$

Nome: _____