Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, I semestre
19 dicembre 2019

CP410: Esonero 2, 19 dicembre 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nome:____

1. Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie i.i.d. normali standard. Sia Y una variabile aleatoria indipendente dalle $\{X_i\}$, con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Definiamo $Z_\lambda = 0$ se $Y = 0$ e

$$Z_\lambda = \sum_{i=1}^{Y} X_i,$$

se $Y \geqslant 1$. Calcolare:

   (a) il valore atteso condizionato $\mathbb{E}[Z_\lambda \,|\, Y]$, $\lambda > 0$;
   (b) la funzione caratteristica $\varphi_\lambda(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta Z_\lambda}]$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$;
   (c) il limite in distribuzione della variabile $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z_\lambda$ per $\lambda \to \infty$.

Soluzione: a). Notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathbb{E}[Z_\lambda \,|\, Y = k] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i \,|\, Y = k] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i] = 0\,.$$

Allora $\mathbb{E}[Z_\lambda \,|\, Y] = 0$ q.c.

b). Condizionata a $\{Y = k\}$ la Z_λ ha distribuzione $N(0, k)$. Allora

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{E}[e^{i\theta Z_\lambda} \,|\, Y = k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) e^{-\frac{1}{2}\theta^2 k} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}\theta^2 k} = e^{\lambda(e^{-\frac{1}{2}\theta^2} - 1)}.\end{aligned}$$

c). Dall'espressione precedente segue che

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta Z_\lambda/\sqrt{\lambda}}\right] = \varphi_\lambda\left(\theta/\sqrt{\lambda}\right) = e^{\lambda\left(e^{-\frac{\theta^2}{2\lambda}} - 1\right)} \to e^{-\theta^2/2}\,, \qquad \lambda \to \infty.$$

Dunque $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z_\lambda$ converge in distribuzione a una normale standard per $\lambda \to \infty$.

Nome:____

2. Una sequenza infinita di lettere viene generata scegliendo indipendentemente e uniformemente a caso ogni lettera dall'insieme di tre lettere $\{a, b, c\}$. Sia τ_{abb} il numero di passi necessario per ottenere per la prima volta la stringa abb. Analogamente, sia τ_{aba} il numero di passi necessario per ottenere per la prima volta la stringa aba. Calcolare:

   (a) i valori attesi $\mathbb{E}[\tau_{abb}]$ e $\mathbb{E}[\tau_{aba}]$

   (b) la probabilità $\mathbb{P}(\tau_{abb} > \tau_{aba})$

Soluzione: (a). Gli argomenti usuali di martingala mostrano che

$$\mathbb{E}[\tau_{abb}] = 3^3 = 27\,, \qquad \mathbb{E}[\tau_{aba}] = 3^3 + 3 = 30.$$

(b). Sia $M^{(abb)}$ la martingala associata a τ_{abb} e $M^{(aba)}$ quella associata τ_{aba} come nel punto a) sopra e sia

$$\tau = \tau_{abb} \wedge \tau_{aba}$$

il minimo dei due tempi. Allora la martingala $Q_n = M_n^{(abb)} - M_n^{(aba)}$, per il teorema di optional stopping, soddisfa

$$\mathbb{E}[Q_\tau] = 0.$$

Inoltre per costruzione si ha

$$Q_\tau = 3^3 1_{\tau_{abb} < \tau_{aba}} - (3^3 + 3 - 3) 1_{\tau_{abb} > \tau_{aba}} = 3^3 (1_{\tau_{abb} < \tau_{aba}} - 1_{\tau_{abb} > \tau_{aba}}).$$

Allora $\mathbb{E}[Q_\tau] = 0$ implica

$$\mathbb{P}(\tau_{abb} < \tau_{aba}) = 1 - \mathbb{P}(\tau_{abb} < \tau_{aba}),$$

ossia

$$\mathbb{P}(\tau_{abb} < \tau_{aba}) = \frac{1}{2}.$$

Il risultato è intuitivamente comprensibile per simmetria osservando che per realizzare abb oppure aba è necessario realizzare ab e poi una tra a e b.

Nome:____

3. Enunciare e dimostrare il teorema di optional stopping per martingale.

Nome:____

4. Sia $p \in (0,1)$ e siano X_i variabili aleatorie i.i.d. tali che

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{con probab. } \frac{1}{4} \\ -1 & \text{con probab. } \frac{1}{4} \\ +2 & \text{con probab. } \frac{p}{2} \\ -2 & \text{con probab. } \frac{1-p}{2} \end{cases}$$

Sia S_n la passeggiata aleatoria definita da:

$$S_0 = 0\,, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Se τ è il primo $n \geqslant 1$ in cui $S_n \geqslant 2$, dimostrare che:

(a) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ se e solo se $p > 1/2$

(b) per ogni $p > 1/2$ si ha

$$\frac{2}{2p-1} \leqslant \mathbb{E}[\tau] \leqslant \frac{3}{2p-1}.$$

Soluzione:

a). Notiamo che $\mathbb{E}[X_i] = p - (1-p) = 2p-1$ e dunque

$$M_n = S_n - (2p-1)n$$

è una martingala. Mostriamo che se $p \leqslant 1/2$ allora $\mathbb{E}[\tau] = \infty$. Poiché M_n ha incrementi limitati, se fosse $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, per il teorema di optional stopping si avrebbe $\mathbb{E}[M_\tau] = M_0 = 0$. Ma se $p \leqslant 1/2$, allora $(1-2p)\tau \geqslant 0$ e dunque $M_\tau = S_\tau + (1-2p)\tau \geqslant 2 + (1-2p)\tau \geqslant 2$, che è in contraddizione con $\mathbb{E}[M_\tau] = 0$.

Mostriamo che se $p > 1/2$, allora $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Osserviamo che $\tau > k$ implica $S_k \leqslant 1$ e dunque

$$\mathbb{P}(\tau > k) \leqslant \mathbb{P}(S_k \leqslant 1) = \mathbb{P}(M_k \leqslant 1 - (2p-1)k).$$

Se k è abbastanza grande ($k \geqslant k_0(p)$ per qualche $k_0(p) \in \mathbb{N}$) si ha

$$\mathbb{P}(M_k \leqslant 1 - (2p-1)k) \leqslant \mathbb{P}(M_k \leqslant\, -\tfrac{1}{2}(2p-1)k)\,.$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{2}(2p-1) > 0$ e ricordando per esempio che che $\mathbb{E}[M_k^4] \leqslant Ck^2$ per qualche costante $C > 0$ indipendente da k, la disuguaglianza di Markov implica che

$$\mathbb{P}(\tau > k) \leqslant \mathbb{P}(M_k \leqslant\, -\varepsilon k) \leqslant C\varepsilon^{-4}k^{-2}.$$

Dunque

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geqslant k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau > k) < \infty.$$

b) Applicando l'optional stopping alla martingala M_n si ha $0 = \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[S_\tau] - (2p-1)\mathbb{E}[\tau]$. Ora osserviamo che poiché i salti possono essere di 1 o 2 unità, si ha $S_\tau = 2$ oppure $S_\tau = 3$. Dunque $2 \leqslant \mathbb{E}[S_\tau] \leqslant 3$. Allora

$$\frac{2}{2p-1} \leqslant \mathbb{E}[\tau] \leqslant \frac{3}{2p-1}.$$

Nome:____

5. Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie i.i.d. tali che $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{se } |X_n| \leqslant n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X_1]$.

(b) L'evento $\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{X_n \neq Y_n\}$ ha probabilità 0.

(c) Si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} < \infty$.

Soluzione: a). Abbiamo $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant n}$. Allora

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant n}] = \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \leqslant n}].$$

Poiché $|X_1| < \infty$ q.c. abbiamo che $X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \leqslant n} \to X_1$ q.c. per $n \to \infty$. Inoltre $|X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \leqslant n}| \leqslant |X_1|$. Allora $\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant n}] \to \mathbb{E}[X_1]$ per il teorema di convergenza dominata.

b). Per il primo lemma di Borel-Cantelli è sufficiente mostrare che

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_n \mathbb{P}(|X_n| > n) < \infty.$$

Ma $\mathbb{P}(|X_n| > n) = \mathbb{P}(|X_1| > n)$ è sommabile essendo

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > t) dt \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n).$$

c). Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2 \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant n}]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{|X_1| \leqslant n}]}{n^2} = \mathbb{E}\left[|X_1|^2 \sum_{n \geqslant |X_1|} \frac{1}{n^2} \right].$$

Inoltre, per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 4 \int_{\ell}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant 4 \frac{1}{\ell}$. Dunque $\sum_{n \geqslant a} \frac{1}{n^2} \leqslant 4/a$, per ogni $a > 0$. Allora $|X_1|^2 \sum_{n \geqslant |X_1|}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 4|X_1|$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \leqslant 4\, \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Nome:____