PAC - 29 APRILE 2004

E 7. Metodo Monte Carlo per il calcolo di integrali.

1. Si scriva un programma per calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 4\,\mathrm{arctg}\, x\,\Big|_0^1 \;=\; \pi$$

attraverso le somme parziali $S_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M f(X_i)$, dove $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e $X_1, \ldots, X_M$ sono realizzazioni indipendenti di una v.a. uniforme in $[0,1)$.

2. Si calcoli l'integrale gaussiano

$$I(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy\,, \quad x \geqslant 0\,.$$

Si grafichi la funzione $I(x)$ per tutti i multipli di 0.1 nell intervallo $[0, 10]$.

E 8. Metodo Monte Carlo per il calcolo di aree (metodo del rigetto)

Si scriva un programma che utilizzi il metodo del rigetto per calcolare il valore di π come l'area di un cerchio di raggio 1 inscritto in un quadrato di lato 2. Si discuta l'efficienza dell'algoritmo rispetto all'esercitazione E 7.

Suggerimenti

E 7. Ricordiamo che se X è v.a. uniforme in $[0,1)$, data una funzione continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{E}f(X) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Per la legge dei grandi numeri tale valore può essere approssimato dalla media empirica $S_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M f(X_i)$ dove $X_1, \ldots, X_M$ sono M realizzazioni indipendenti della variabile X. Scegliendo $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e simulando le variabili X_i otteniamo dunque una stima di $\pi = 3.14159265358\ldots$.

Per il calcolo dell'integrale $I(x)$ si utilizza la formula generale

$$\int_a^b f(y)\,dy = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)y)\,dy\,, \qquad -\infty < a < b < \infty\,.$$

Poniamo $a = 0$, $b = x$, $f(y) = \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Se Z è v.a. uniforme in $[0,1)$ si ha dunque $I(x) = x\,\mathbb{E}f(xZ)$. Dalla legge dei grandi numeri segue che se $Z_1, \ldots, Z_M$ sono realizzazioni indipendenti di Z allora

$$W_M = \frac{x}{M}\sum_{i=1}^M f(xZ_i)$$

approssima l'integrale $I(x)$ al crescere di M. Il grafico di $I(x)$ (fissando per esempio $M = 10^4$ iterazioni) al crescere di x da 0 a 10 mostra la rapida convergenza $I(x) \to I(\infty) = \frac{1}{2}$.

E 8. Sia Q il quadrato di lato 2 centrato nell'origine del piano cartesiano. Sia C il cerchio di raggio 1 con centro nell'origine. Siano u e v due v.a. indipendenti uniformi in $[0,1)$ e si ponga $x = -1+2u$, $y = -1+2v$. Osserviamo che il punto $P = (x,y)$ di coordinate x, y è distribuito uniformemente in Q. Definiamo $Z = \mathbf{1}(P \in C) = \mathbf{1}(x^2+y^2 \leqslant 1)$. Abbiamo

$$\mathbb{P}(P \in C) = \mathbb{E}Z = \frac{\text{area di } C}{\text{area di } Q} = \frac{\pi}{4}$$

Per la legge dei grandi numeri possiamo quindi stimare π tramite

$$S_M = \frac{4}{M}\sum_{i=1}^M Z_i$$

dove $Z_1, \ldots, Z_M$ sono realizzazioni indipendenti di Z. Da una analisi qualitativa risulta che il metodo del rigetto è meno efficace del metodo dell'esercitazione E 7.

caputo@mat.uniroma3.it.