(m et n sont des entiers non négatifs). Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^* P^*}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar z}=\frac{\partial^* P^*}{\partial \bar z} \; ; \quad \left(P^*(z, \bar z)=P\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)\right).$$

8.46. Soit $P(z)$ un polynôme à une indéterminée z. Posons

$$Q(z)=\overline{P(\bar z)}.$$

Montrer que :

1. La fonction $Q(z)$ est un polynôme à une indéterminée z.
2. Les formules suivantes ont lieu:

$$P(z)+Q(\bar z)=2 \operatorname{Re} P(z) \; ; \quad P(z)-Q(\bar z)=2i \operatorname{Im} P(z).$$

8.47. Soit un polynôme $P(z)$. Posons

$$u(x, y)=\operatorname{Re} P(x+iy) \; ; \quad v(x, y)=\operatorname{Im} P(x+iy).$$

Montrer que les formules ci-dessous sont valables:

1. $P(z)=2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\overline{P(0)}$. 2. $P(z)=2iv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)+\overline{P(0)}$.

8.48. Soit un polynôme $P(z)$. Posons

$$R(x, y)=|P(x+iy)|, \quad \Phi(x, y)=\arg P(x+iy).$$

Montrer que les formules ci-dessous sont vraies:

1. $P(z)\overline{P(0)}=R^2\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)$. 2. $P(z)=\overline{P(0)}e^{2i\Phi\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)}$.

8.49. Démontrer la formule ci-dessous qui permet de reconstituer le polynôme $P(z)$ d'après la fonction $a \operatorname{Re} P(x+iy)+b \operatorname{Im} P(x+iy)=g(x, y)$:

$$P(z)=\frac{2}{a-ib} g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\frac{a+ib}{a-ib}\overline{P(0)}$$

(ici a et b sont des constantes réelles, l'une d'elles au moins étant différente de zéro).

8.50. Montrer que les formules des problèmes 8.47 à 8.49 restent valables si $P(z)$ n'est plus considéré comme un polynôme mais comme une fonction rationnelle dont le dénominateur est différent de zéro au point $z=0$.

Nota. En effet, à l'aide du théorème d'unicité, il est facile de montrer que ces formules restent valables pour toute fonction régulière au point $z=0$.

8.51. Reconstituer la fonction régulière $f(z)$ d'après la fonction donnée:

1. $\operatorname{Re} f=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, \quad f(0)=0$.
2. $\operatorname{Re} f=e^x(x\cos y-y\sin y), \quad f(0)=0$.
3. $\operatorname{Re} f=x\cos x \operatorname{ch} y+y\sin x \operatorname{sh} y, \quad f(0)=0$.
4. $\operatorname{Im} f=y\cos y \operatorname{ch} x+x\sin y \operatorname{sh} x, \quad f(0)=0$.
5. $|f|=(x^2+y^2)e^x$. 6. $\arg f=xy$.
7. $|f|=e^{r^2\cos 2\varphi} \, (z=re^{i\varphi})$.
8. $\arg f=\varphi+r\sin\varphi \, (z=re^{i\varphi})$.

Dans le cas où les fonctions $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$, $|f(z)|$, $\arg f(z)$ ne sont pas données comme des fonctions de x et y, mais comme des fonctions de z et $\bar z$, la reconstitution de $f(z)$ d'après l'une des fonctions citées plus haut s'effectue d'une façon encore plus simple.

8.52. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas pour $z=a$ et soient

$$\operatorname{Re} f(z)=u(z, \bar z), \quad \operatorname{Im} f(z)=v(z, \bar z),$$
$$|f(z)|=\operatorname{Re}(z, \bar z), \quad \arg f(z)=\Phi(z, \bar z).$$

Montrer que

1. $f(z)=2u(z, \bar a)-\overline{f(a)}$. 2. $f(z)=2iv(z, \bar a)+\overline{f(a)}$.
3. $f(z)\overline{f(a)}=R^2(z, \bar a)$. 4. $f(z)=\overline{f(a)}e^{2i\Phi(z, \bar a)}$.

8.53. Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ trois fonctions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas pour $z=a$. Montrer que, si ces fonctions satisfont à la condition $|f(z)|=\frac{1+|\varphi(z)|^2}{1+|\psi(z)|^2}$, elles vérifient également la condition

$$f(z)\overline{f(a)}=\left(\frac{1+\varphi(z)\overline{\varphi(a)}}{1+\psi(z)\overline{\psi(a)}}\right)^2.$$

Indication. La grandeur $|w(z)|^2$ peut être mise sous la forme $w(z)\, w_1(\bar z)$, où $w_1(z)=\overline{w(\bar z)}$.

8.54. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle régulière au point $z=0$ satisfaisant à la condition

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{1}{1+|z|^2}.$$

Montrer que $f(z)$ est une fonction homographique, c'est-à-dire $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

8.55. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ y satisfaisant aux conditions

$$|f(z)|<1, \quad \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}=\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Montrer que $f(z)$ est une fonction homographique, c'est-à-dire $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

Nota. Conformément au nota du problème 8.50, la condition de rationalité de la fonction $f(z)$ est superflue dans les problèmes 8.54 et 8.55.

* * *

8.56. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain domaine D. Montrer que la somme $f(z)+\overline{g(z)}$ est réelle dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z)=g(z)+C$, où C est une constante réelle.