

8.57. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain domaine D et soit $g(z) \neq 0$. Montrer que le produit $f(z)\overline{g(z)}$ n'est pas négatif dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z) = C\overline{g(z)}$, où C est une constante non négative.

8.58. Les conditions du problème 8.57 restant les mêmes, montrer que le produit $f(z)\overline{g(z)}$ est réel dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z) = C\overline{g(z)}$, où C est une constante réelle.

8.59. Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ des fonctions régulières dans un certain domaine D et soit $|g_1(z)|^2 + |g_2(z)|^2 \neq 0$. Montrer que l'expression $f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)}$ est réelle dans tout le domaine D si, et seulement si,

$$f_1(z) = \alpha_{11}g_1(z) + \alpha_{12}g_2(z), \quad f_2(z) = \alpha_{21}g_1(z) + \alpha_{22}g_2(z),$$

où les constantes α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} satisfont aux conditions

$$\operatorname{Im} \alpha_{11} = 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} = \overline{\alpha_{21}}.$$

Indication. En écrivant la condition de réalité sous la forme

$$f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)} = \overline{f_1(z)}g_1(z) + \overline{f_2(z)}g_2(z),$$

la différentier deux fois par rapport à z et trouver la condition de compatibilité des trois équations linéaires à deux inconnues $\overline{g_1(z)}$ et $\overline{g_2(z)}$ obtenues.

8.60. Les conditions du problème 8.59 étant les mêmes, montrer que l'expression $f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)}$ n'est pas négative dans tout le domaine D si, et seulement si,

$$f_1(z) = \alpha_{11}g_1(z) + \alpha_{12}g_2(z), \quad f_2(z) = \alpha_{21}g_1(z) + \alpha_{22}g_2(z),$$

où les constantes α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} satisfont aux conditions

$$\alpha_{11} \geq 0, \quad \alpha_{22} \geq 0, \quad \alpha_{12} = \overline{\alpha_{21}}, \quad |\alpha_{12}|^2 \leq \alpha_{11}\alpha_{22}.$$

8.61. Soient $F(z)$ et $G(z)$ deux vecteurs d'un espace complexe à n dimensions, dont les composantes sont des fonctions régulières dans un certain domaine D , et soit $G(z)$ non identiquement nul. Montrer que le produit scalaire $(F(z), G(z)) = \sum_{k=1}^n F_k(z)\overline{G_k(z)}$ est réel dans tout le domaine D si, et seulement si, $F(z) = CUG(z)$, où C est une constante réelle, U étant une matrice unitaire constante.

8.62. Les conditions du problème 8.61 restant les mêmes, montrer que le produit scalaire $(F(z), G(z))$ est positif dans tout le domaine D si, et seulement si, $F(z) = CUG(z)\overline{U}$, où C est une constante positive, U étant une matrice unitaire constante.

RÉPONSES

8.01.

1. Nulle part. 2. Sur l'axe réel et sur l'axe imaginaire. 3. Au point $z=0$. 4. Sur la droite $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$. 5. Au point $z=0$. 6. Partout.

8.08.

$$1. \operatorname{sh} ze^{\operatorname{ch} z}. \quad 2. 2e^z \cos(2e^z).$$

$$3. (1-i)\cos z \operatorname{ch} z + (1+i)\sin z \operatorname{sh} z. \quad 4. (1-z)e^{-z}.$$

$$5. \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z, \quad z \neq 0. \quad 6. \frac{(1+z^2)(\cos z - z \sin z) - 2z^2 \cos z}{(1+z^2)^2}, \quad z \neq \pm i.$$

8.09.

$$1. \frac{1}{\cos^2 z}. \quad 2. -\frac{1}{\sin^2 z}. \quad 3. \frac{2e^z}{(e^z-1)^2}. \quad 4. \cos 2z. \quad 5. -2 \frac{e^z + e^{-z}}{(e^z - e^{-z})^3}.$$

$$6. \frac{1}{(\cos z - \sin z)^2}.$$

8.30.

$$1. -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C. \quad 2. 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C.$$

$$3. x \cos y \operatorname{sh} x - y \sin y \operatorname{ch} x + C. \quad 4. r \varphi \sin \varphi - r \ln r \cdot \cos \varphi + C.$$

8.31.

$$1. C \ln(x^2 + y^2) + C_1. \quad 2. C(x^2 - y^2) + C_1.$$

$$3. C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_1. \quad 4. C \frac{x}{x^2 + y^2} + C_1.$$

8.32.

$$1. Ax + B. \quad 2. A \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + B. \quad 3. A \ln(x^2 + y^2) + B. \quad 4. \frac{Ax}{x^2 + y^2} + B.$$

8.39.

$$1. \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{|z|}{z}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}.$$

$$2. \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{p}{2} \frac{|z-a|\bar{p}}{z-a}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{p}{2} \frac{|z-a|\bar{p}}{\bar{z}-\bar{a}}.$$

$$3. \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z-a-b}{2\sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{z}-\bar{a}-\bar{b}}{2\sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}}.$$

$$4. \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2iz}{a^2 - z^2} \frac{|z^2 - a^2|}{(|z+a|-i|z-a|)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{2i\bar{z}}{a^2 - \bar{z}^2} \frac{|z^2 - a^2|}{(|z+a|-i|z-a|)^2}.$$

8.40.

$$1. \frac{p^2}{4} |z|^{p-2}. \quad 2. \frac{p}{4} e^{p|z|} \left(p + \frac{1}{|z|}\right). \quad 3. 0.$$

$$4. \frac{1}{(1+|z|^2)^2}. \quad 5. \frac{1-|z|^2}{4|z|(1+|z|^2)^2}.$$

8.51.

$$1. (1-2i)z^3. \quad 2. ze^z. \quad 3. z \cos z. \quad 4. z \operatorname{ch} z.$$

$$5. e^{i\alpha z^2} e^z, \quad \operatorname{Im} \alpha = 0, \quad \alpha = \text{const.} \quad 6. Ae^{2z/2}, \quad A > 0 - \text{const.}$$

$$7. e^{z^2 + i\alpha}, \quad \operatorname{Im} \alpha = 0, \quad \alpha = \text{const.} \quad 8. Aze^z, \quad A > 0 - \text{const.}$$

§ 9. Interprétation géométrique de la dérivée

Soit $w(z)$ une fonction définie dans un domaine D . L'application linéaire $w = Az + B\bar{z} + C$ est appelée *partie linéaire principale au point $z = z_0$* de l'application $w = w(z)$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w(z) - (Az + B\bar{z} + C)|}{|z - z_0|} = 0.$$