

§ 13. Théorème d'unicité. Prolongement analytique

Les problèmes qui suivent nécessitent l'utilisation du *théorème d'unicité* :

Si une fonction $f(z)$ est régulière dans un domaine D et si elle s'annule sur un ensemble E , qui a au moins un point limite dans le domaine D , alors $f(z) \equiv 0$.

13.01. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine D . Montrer que le domaine D ne contient qu'un nombre fini de solutions de l'équation $f(z) = a$ (pour une valeur arbitraire fixée de a).

13.02. Soit $f(z)$ une fonction régulière au point $z = z_0$. Montrer que la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\ln |f(z) - f(z_0)|}{\ln |z - z_0|}$ existe et qu'elle est égale à un entier positif.

13.03. Est-ce qu'il existe une fonction $f(z)$ régulière dans un certain voisinage du point $z = 0$ satisfaisant à l'une des conditions énumérées plus bas ($n = 1, 2, \dots$) ?

$$1. f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}.$$

$$2. f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n.$$

$$3. f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

$$4. f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1}.$$

$$5. f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n}.$$

$$6. f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

$$7. f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

$$8. f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}.$$

$$9. \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}.$$

$$10. 2^{-n} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 2^{1-n}.$$

$$11. n^{-5/2} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 2n^{-5/2}.$$

$$12. \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cos \pi n}{2n+1}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

13.04. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine D y vérifiant l'équation différentielle $f'(z) = P(z, f(z))$, où $P(z, w)$ est un polynôme à ses indéterminées. Montrer que, si en un certain point $z_0 \in D$ l'égalité $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ a lieu, alors $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

13.05. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine D y vérifiant l'équation différentielle

$$f^{(m)}(z) = P(z, f, f', \dots, f^{(m-1)}),$$

où P est un polynôme à ses indéterminées. Montrer que, si en un certain point $z_0 \in D$ les égalités

$$f_1(z_0) = f_2(z_0), \dots, f_1^{(m-1)}(z_0) = f_2^{(m-1)}(z_0)$$

ont lieu, alors $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

13.06. Montrer que l'équation fonctionnelle $f(z) = f(2z)$ n'a pas de solutions régulières au point $z = 0$ et non identiquement constantes.

13.07. Soit $q = e^{2\pi i \alpha}$, où α est un nombre irrationnel. Montrer que l'équation fonctionnelle $f(z) = f(qz)$ n'a pas de solutions $f(z)$ régulières pour $1/2 < |z| < 2$ et non identiquement constantes.

13.08. Soit $f(z)$ une fonction périodique régulière dans un certain domaine contenant le point $z = \infty$. Montrer que $f(z) = \text{const}$ dans tout le domaine de régularité.

RÉPONSES

13.03.

1. Non. 2. Non. 3. Oui. 4. Oui. 5. Non. 6. Oui. 7. Non. 8. Non. 9. Oui. 10. Non. 11. Non. 12. Non.

13.10.

1. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. Tout le plan, sauf les points $z = \pi n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

6. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7. Tout le plan.

8. Tout le plan, sauf les points $z = \ln \left| \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right| + 2\pi i m + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn} \left(n + \frac{1}{2} \right),$
 $n=0, 1, 2, \dots, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

9. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2} (2n+1), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$

$z = \pm \ln (\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 - 1}) + 2\pi i m, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$