

§ 19. Points singuliers isolés de caractère uniforme

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $0 < |z-a| < \rho$ (ou bien dans la couronne $\rho < |z| < \infty$ si $a = \infty$) sans être définie au point $z=a$. Dans ce cas, le point a est appelé *point singulier isolé de caractère uniforme* pour la fonction $f(z)$.

Suivant le comportement de la fonction $f(z)$ à proximité du point $z=a$, on distingue les trois types de points singuliers isolés de caractère uniforme :

1. Si la limite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe et est finie, le point $z=a$ est appelé *point singulier éliminable* pour la fonction $f(z)$.
2. Si la limite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe mais est égale à l'infini, le point $z=a$ est appelé *pôle* de la fonction $f(z)$.
3. Si la limite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ n'existe pas, le point $z=a$ est appelé *point singulier essentiel* de la fonction $f(z)$.

19.01. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier éliminable pour les fonctions ci-dessous :

$$1. \frac{z^2-1}{z-1} \quad (a=1). \quad 2. \frac{\sin z}{z} \quad (a=0). \quad 3. \frac{z}{\operatorname{tg} z} \quad (a=0).$$

$$4. \frac{1-\cos z}{z^2} \quad (a=0). \quad 5. \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \quad (a=0).$$

$$6. \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z} \quad (a=0). \quad 7. \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad \left(a=\frac{\pi}{2}\right).$$

$$8. \frac{z^2-1}{z^3+1} \quad (a=\infty).$$

19.02. Montrer que le point $z=a$ est un pôle des fonctions suivantes :

$$1. \frac{1}{z} \quad (a=0). \quad 2. \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad (a=i). \quad 3. \frac{z^2+1}{z+1} \quad (a=\infty).$$

$$4. \frac{z}{1-\cos z} \quad (a=0). \quad 5. \frac{z}{(e^z-1)^2} \quad (a=0). \quad 6. \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} \quad (a=\infty).$$

$$7. \frac{z}{e^z+1} \quad (a=\pi i). \quad 8. \operatorname{tg} \pi z \quad \left(a=\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots\right).$$

19.03. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières au point $z=a$, et soit $f(a)=g(a)=0$. Montrer que

$$1. \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad 2. \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\{g'(z)f''(z)\}}{\{f'(z)g''(z)\}}.$$

Remarque. Il est plus commode d'utiliser la première formule pour lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ au point $a \neq \infty$, et la deuxième formule pour $a = \infty$.

19.04. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières au point $z=a$, et soit $f(a)=g(a)=0$. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier isolé de caractère uniforme pour la fonction $F(z)=f(z)/g(z)$ et qu'il ne peut pas être un point singulier essentiel.

19.05. Soit $z=a$ un point singulier isolé de caractère uniforme pour une fonction $f(z)$. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier essentiel pour la fonction $f(z)$ si, et seulement si, il existe deux suites $z'_1, z'_2, \dots$ et $z''_1, z''_2, \dots$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = B, \quad A \neq B.$$

19.06. Montrer que le point $z=\infty$ est un point singulier essentiel pour la fonction $\sin z$.

Indication. Utiliser le résultat du problème 19.05 en posant $z'_n = n\pi$, $z''_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n=1, 2, \dots$

19.07. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier essentiel des fonctions ci-dessous :

$$1. e^z \quad (a=\infty). \quad 2. e^{-z^2} \quad (a=\infty). \quad 3. \sin \frac{\pi}{z^2} \quad (a=0).$$

$$4. z^2 \cos \frac{\pi}{z} \quad (a=0). \quad 5. e^{\operatorname{tg} z} \quad \left(a=\frac{\pi}{2}\right). \quad 6. \sin(e^z) \quad (a=\infty).$$

$$7. \cos \frac{z}{z+1} \quad (a=-1). \quad 8. \sin \frac{\pi}{z^2+1} \quad (a=-i).$$

19.08. Trouver tous les points singuliers isolés de caractère uniforme pour les fonctions ci-dessous et déterminer leur type :

$$1. \frac{z}{\sin z}. \quad 2. \frac{1-\cos z}{\sin^2 z}. \quad 3. z^2 \sin \frac{z}{z+1}. \quad 4. \frac{1}{z^2-1} \cos \frac{\pi z}{z+1}.$$

$$5. \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}. \quad 6. z(e^{\frac{1}{z}}-1). \quad 7. e^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}}. \quad 8. \sin(e^{\frac{1}{z}}).$$

RÉPONSES

19.08.

1. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 2\pi, \dots$: pôles.
2. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$: pôles.
3. $z=\infty$: pôle; $z=-1$: point singulier essentiel.
4. $z=\infty$ et $z=1$: points singuliers éliminables; $z=-1$: point singulier essentiel.
5. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$: pôles.
6. $z=\infty$: point singulier éliminable; $z=0$: point singulier essentiel.
7. $z=\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$: points singuliers essentiels.
8. $z=0$: point singulier essentiel.