

## Numeri complessi

**1. (Il campo complesso)** Il campo complesso  $\mathbb{C}$  è, per definizione, la terna  $(\mathbb{R}^2, +, *)$ , cioè  $\mathbb{R}^2$  equipaggiato con due operazioni binarie, dette "somma e prodotto complesso", definite come segue:

$$\bullet (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{SC})$$

$$\bullet (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \quad (\text{PC})$$

Gli elementi di  $\mathbb{C}$  sono, dunque, semplicemente coppie ordinate di numeri reali  $z = (x, y)$ .

**Osservazione 1** (i) Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma (S) di  $\mathbb{R}^2$  come spazio vettoriale (vedi **1**, Complemento 7), il "prodotto complesso"  $*$  è assai diverso sia dal prodotto in (P) in **1**, Complemento 7, che dal prodotto scalare (51) (Complemento 7): esso infatti è una operazione binaria da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ : ad una coppia di vettori  $z_1$  e  $z_2$  in  $\mathbb{R}^2$  associa un terzo vettore  $z$  in  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) La somma in (SC) è (come già osservato nel Complemento 7) commutativa e associativa; l'elemento neutro è il vettore (o "numero complesso")  $0 := (0, 0)$ ; l'opposto di  $z = (x, y)$  è  $-z := (-x, -y)$ .

**Proposizione 2** (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*

(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è  $1 := (1, 0)$ .*

(iii) *Se  $z = (x, y) \neq 0$  il reciproco di  $z$ , denotato  $z^{-1}$  o  $1/z$  è dato da*

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

(iv) *Vale la proprietà distributiva:*

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3, \quad \forall z_i \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

**Dimostrazione** (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$(x_1, y_1) * \left( (x_2, y_2) * (x_3, y_3) \right) = \left( (x_1, y_1) * (x_2, y_2) \right) * (x_3, y_3), \quad (2)$$

o anche, in vista della commutatività di  $*$ ,

$$(x_1, y_1) * \left( (x_2, y_2) * (x_3, y_3) \right) = (x_3, y_3) * \left( (x_2, y_2) * (x_1, y_1) \right). \quad (3)$$

D'altra parte, dalla definizione di  $*$  si ha che

$$\begin{aligned} \left( (x_1, y_1) * (x_2, y_2) \right) * (x_3, y_3) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3), \end{aligned}$$

che è simmetrica in 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (3) (e quindi (2)) è verificata.

(ii), (iii) e (iv) sono semplici verifiche dirette che seguono immediatamente dalla definizione di  $*$ . ■

**Osservazione 3** (i) Un campo  $(X, +, \cdot)$  è un insieme  $X$  dotato di due operazioni binarie “+” e “ $\cdot$ ” tali che  $(X, +)$  è un gruppo commutativo<sup>1</sup>;  $(X \setminus \{0\}, \cdot)$  (dove 0 è l'elemento neutro di +) è un gruppo commutativo<sup>2</sup>; vale la proprietà distributiva.

Esempi di campi sono  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ .

(ii)  $(0, 1)^2 := (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$ . Il numero complesso  $(0, 1)$  prende il nome di *unità immaginaria*. L'esistenza di tale elemento è alla base della definizione di campo complesso.

**2 ( $\mathbb{R}$  come sottoinsieme di  $\mathbb{C}$ )** Sia

$$j : x \in \mathbb{R} \rightarrow j(x) := (x, 0) \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

La funzione  $j$ , come è immediato verificare, è un isomorfismo di  $\mathbb{R}$  su  $j(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$ , cioè  $j$  è iniettiva e conserva la somma e il prodotto con i rispettivi elementi neutri:

$$j(x+y) = j(x)+j(y), \quad j(xy) = j(x)*j(y), \quad j(0) = 0 := (0, 0), \quad j(1) = 1 := (1, 0). \quad (5)$$

Tale isomorfismo permette di *identificare*  $\mathbb{R}$  con  $j(\mathbb{R})$  identificando  $x \in \mathbb{R}$  con  $j(x) \in \mathbb{C}$ . Tale identificazione è consistente con le notazioni  $0 = (0, 0)$  e  $1 = (1, 0)$  per le unità additive e moltiplicative di  $\mathbb{C}$ .

Possiamo, ora, introdurre la **notazione classica**. Innanzitutto il prodotto  $z_1 * z_2$  verrà denotato (analogamente a quanto si fa in  $\mathbb{R}$ ) semplicemente con  $z_1 z_2$ :

$$z_1 z_2 := z_1 * z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \quad (6)$$

analogamente le *potenze* verranno denotate  $z^n$ :

$$z^n := \underbrace{z * \dots * z}_n, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (7)$$

<sup>1</sup>Ossia, per ogni  $x, y, z \in X$  vale:  $x + y = y + x$ ;  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;  $\exists 0 \in X$  tale che  $x + 0 = 0 + x = x$  per ogni  $x \in X$ ; per ogni  $x$  esiste  $-x \in X$  tale che  $x + (-x) = 0$ .

<sup>2</sup>Ossia, per ogni  $x, y, z \in X$  vale:  $x \cdot y = y \cdot x$ ;  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ;  $\exists 1 \in X$  tale che  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  per ogni  $x \in X$ ; per ogni  $x$  esiste  $x^{-1} \in X$  tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

e l'unità immaginaria  $(0, 1)$  verrà denotata con  $i := (0, 1)$ :

$$0 := (0, 0), \quad 1 := (1, 0), \quad i := (0, 1). \quad (8)$$

Dunque, tramite l'identificazione di  $\mathbb{R}$  con  $j(\mathbb{R})$ , scriveremo ogni numero complesso  $z = (x, y)$  come

$$z = x + iy = j(x) + (0, 1) * j(y) = (x, y). \quad (9)$$

**3 (Complesso coniugato e modulo)** Se  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  denotiamo con  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  il suo *complesso coniugato* definito come

$$\bar{z} = x - iy = (x, -y); \quad (10)$$

il *modulo* di  $z$  è per definizione il numero non negativo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (11)$$

In vista dell'identificazione fatta, abbiamo<sup>3</sup>

$$z\bar{z} = |z|^2. \quad (12)$$

Se  $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ ,

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \overline{z_1 z_2}, \quad (13)$$

e, da (12),

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2} = |z_1| |z_2|. \quad (14)$$

Dunque *il prodotto complesso conserva sia il complesso coniugato che il modulo*.

**Definizione 4** Dato  $z = x + iy$  chiameremo  $x$  la **parte reale** di  $z$  e  $y$  la **parte immaginaria** di  $z$  e scriveremo:

$$x := \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im}(x + iy). \quad (15)$$

Dalla definizione di complesso coniugato seguono immediatamente le relazioni

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (16)$$

**4 (Numeri complessi e coordinate polari)** Usando le coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$ , si ha che

$$x + iy := (x, y) = r(\cos t + i \operatorname{sen} t) := r(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

<sup>3</sup>Nella notazione introdotta all'inizio, avremmo  $z * \bar{z} = (x, y) * (x, -y) = (x^2 + y^2, 0)$ .

dove  $r$  è il modulo di  $z$  e  $t := \text{Arg}(z)$  è l'argomento principale di  $z$ :

$$r := |z|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi). \quad (17)$$

Il prodotto complesso ha una forma particolarmente semplice in coordinate polari: se  $z_j = x_j + iy_j = r_j(\cos t_j + i \text{sen } t_j) \in \mathbb{C}$ , si ha

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos t_1 + i \text{sen } t_1)(\cos t_2 + i \text{sen } t_2) \\ &= r_1 r_2 \left( (\cos t_1 \cos t_2 - \text{sen } t_1 \text{sen } t_2) + i(\cos t_1 \text{sen } t_2 + \text{sen } t_1 \cos t_2) \right) \\ &= r_1 r_2 \left( \cos(t_1 + t_2) + i \text{sen}(t_1 + t_2) \right); \end{aligned} \quad (18)$$

dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg}(z_2), \quad (19)$$

dove<sup>4</sup>  $\arg(z_1 z_2) := \text{Arg}(z_1 z_2) + 2\pi k$  con  $k = [(t_1 + t_2)/2\pi]$ .

Infine, il complesso coniugato corrisponde a cambiare segno all'argomento di  $z$ :

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= \overline{x + iy} = \overline{r \cos t + i \text{sen } t} = r \cos t - i \text{sen } t \\ &= r \left( \cos(-t) + i \text{sen}(-t) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

**5 (Successioni e serie complesse)** La convergenza in  $\mathbb{C}$  è una semplice generalizzazione della convergenza in  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 5** Una successione di numeri complessi  $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$  converge a  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , e scriveremo

$$z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad (\text{oppure } z_n \rightarrow z_0), \quad (21)$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{ tale che } |z_n - z_0| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (22)$$

**Osservazione 6** Poiché

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \geq \max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\}$$

si ha che  $z_n \rightarrow z_0$  implica che le due successioni reali  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  convergono rispettivamente a  $x_0$  e  $y_0$ ; viceversa se  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$ , dai noti teoremi sui limiti di successioni in  $\mathbb{R}$ , segue che la successione  $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \rightarrow 0$ , cioè  $z_n \rightarrow z_0$ . Dunque dire che  $z_n \rightarrow z_0$  è equivalente a dire che  $\text{Re}(z_n) \rightarrow \text{Re}(z_0)$  e  $\text{Im}(z_n) \rightarrow \text{Im}(z_0)$ .

<sup>4</sup>In generale  $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k$  per un qualche intero  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Esempio 1.** Consideriamo la successione  $z_n = a^n$  con  $a \in \mathbb{C}$ . Se  $|a| < 1$  e  $x_n + iy_n := z_n = a^n$ , allora

$$\max\{|x_n|, |y_n|\} \leq |a^n| = |a|^n \rightarrow 0,$$

dunque, in tal caso  $\lim a^n = 0$ . Se  $a = 1$ ,  $a^n = 1$ . Se  $|a| > 1$  allora  $\lim |a^n| = \lim |a|^n = \infty$  e quindi  $a^n$  non converge. Anche nel caso in cui  $a \in S^1 \setminus \{1\}$  si può dimostrare che  $z_n$  non converge.

Analogamente si trattano le **serie complesse**: dire che la serie  $\sum z_k$  converge equivale a dire che la successione

$$\sum_{k=0}^n z_k$$

converge e quindi, per quanto visto prima, equivale a dire che le due serie reali  $\sum x_k$  e  $\sum y_k$  convergono, dove  $x_k + iy_k = z_k$ . In particolare, diremo che una serie  $\sum z_k$  converge assolutamente se converge la serie a termini positivi  $\sum |z_k|$ , in qual caso converge la serie<sup>5</sup>  $\sum z_k$ . Come nel caso reale il simbolo  $\sum z_k$  ha una certa ambiguità poiché denota sia la successione  $\{\sum_{k=0}^n z_k\}$  sia, qualora la successione sia convergente, il suo limite. Infine, nel caso di assoluta convergenza (come nel caso reale), si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|. \quad (23)$$

**Esempio 2 (La serie geometrica).** Sia

$$w_n := \sum_{k=0}^n a^k. \quad (24)$$

Come nel caso reale, otteniamo

$$(1-a)w_n = w_n - aw_n = \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$$

e dunque, se  $a \neq 1$ , si ha

$$w_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad (25)$$

e, in vista dell'Esempio 1, se  $|a| < 1$ , otteniamo la formula nota nel caso reale della serie geometrica di ragione  $a$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad (a \in \mathbb{C}, |a| < 1). \quad (26)$$

<sup>5</sup>Infatti, sia  $\sum_{k=0}^n |x_k|$  che  $\sum_{k=0}^n |y_k|$  sono maggiorate da  $\sum_{k=0}^n |z_k|$  e dunque se  $\sum z_k$  converge assolutamente, convergono assolutamente anche le serie  $\sum x_k$  e  $\sum y_k$  e quindi le serie  $\sum x_k$  e  $\sum y_k$  convergeranno a due numeri reali  $x_0$  e  $y_0$  cosicché  $\sum z_k = x_0 + iy_0$ .

**6 (La serie esponenziale in  $\mathbb{C}$ )** La serie

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (27)$$

converge assolutamente e

$$|\exp(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} . \quad (28)$$

Tale serie prende il nome di **funzione esponenziale** complessa ed è forse la funzione più “importante” della analisi matematica.

Osserviamo che se  $t \in \mathbb{R}$ , allora

$$\begin{aligned} \exp(it) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(it)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n \rightarrow \infty} i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n \rightarrow \infty} i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos t + i \sin t , \end{aligned}$$

tale formula, ossia

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t , \quad (t \in \mathbb{R}) , \quad (29)$$

prende il nome di **formula di Eulero**.

La funzione  $\exp(z)$  sui reali (ossia per  $z \in \mathbb{R}$ ) coincide con  $e^z$  e dunque se  $x$  e  $y$  sono reali si ha che  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ . Tale relazione vale anche nel caso complesso.

**Teorema 7 (“Teorema di addizione per l’esponenziale complesso”)**

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w) , \quad \forall z, w \in \mathbb{C} . \quad (30)$$

**Dimostrazione** Dalla formula del binomio di Newton (che vale inalterata in  $\mathbb{C}$ )

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(z+w)^k}{k!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j w^{k-j} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{w^k}{k!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!} - \varepsilon_n \right)
\end{aligned}$$

dove

$$\varepsilon_n := \sum_{j=1}^n \frac{z^j}{j!} \sum_{k=n-j+1}^n \frac{w^k}{k!}. \quad (31)$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \exp(z) \exp(w),$$

il teorema è conseguenza dell'identità

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (32)$$

Per dimostrare la (32), osserviamo dapprima che

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(1+1)^n}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n+1-j)!};$$

dunque per ogni coppia di interi non negativi la cui somma è  $(n+1)$  si ha

$$\frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall j, k \in \mathbb{N} \text{ tali che } k+j = n+1. \quad (33)$$

Ora, se  $R \geq \max\{|z|, |w|\}$ , dalla (33), osservando che  $j + k = n + 1$  nel termine di destra della (31), si ha che

$$|\varepsilon_n| \leq R^{n+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=n-j+1}^n \frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=n-j+1}^n 1 \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} n^2,$$

che, per  $n$  che tende a  $\infty$ , tende a zero. ■

**Osservazione 8** (i) Poiché la funzione  $\exp(z)$  estende al campo complesso la funzione  $x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x$  (estendendo anche la relazione (30) a tutto  $\mathbb{C}$ ), si pone

$$e^z := \exp(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

(ii) Grazie al teorema di addizione e alla formula di Eulero si ha, per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (35)$$

e dunque

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y. \quad (36)$$

(iii) Dalla formula di Eulero e dal teorema di addizione segue immediatamente che se  $s$  e  $t$  sono reali, allora

$$\begin{aligned} \cos(t+s) + i \operatorname{sen}(t+s) &= e^{i(t+s)} \\ &= e^{it} e^{is} \\ &= (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos s + i \operatorname{sen} s) \\ &= (\cos t \cos s - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s) + i(\operatorname{sen} t \cos s + \cos t \operatorname{sen} s), \end{aligned}$$

relazione che fornisce una nuova prova delle formule di addizione per il seno ed il coseno.