

Primo Esonero – 15/4/2010

N.B. • Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).

- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**
- È necessario svolgere per intero il primo esercizio.

Es 1 [Pt. 10] (i) Trovare la parte reale e immaginaria di $\cos z$.

(ii) Determinare tutti i valori di i^{2i} .

Es 2 [Pt. 15] Trovare il più generale polinomio omogeneo, in due variabili, di secondo grado armonico $u(x, y)$. Determinare la funzione coniugata v e la funzione olomorfa $f(z)$ tale che $f = u + iv$.

Es 3 [Pt. 15] Sia $z \in \Omega := \{\operatorname{Im} z > 0\} \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$ una funzione analitica tale che $f(i) = 1$ e $|f^2(z) - 1| < 1$ per ogni $z \in \Omega$. Dimostrare che $\operatorname{Re} f(z) > 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Es 4 [Pt. 25] Mappare in modo conforme la regione $\Omega := \{|z| < 1 \text{ e } 0 < \arg z < \frac{3}{4}\pi\}$ su $\{\operatorname{Re} z > 1\}$.

Es 5 [Pt. 10] Calcolare: (i) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$; (ii) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$.

Es 6 [Pt. 10] Dimostrare che una funzione intera f tale che $\exists R > 0, n \in \mathbb{N}$ tale che $|f(z)| < |z|^n$ per ogni $|z| > R$ è un polinomio di grado n .

Es 7 [Pt. 15] Discutere le singolarità di $\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z - 1}$.