1.4 Il logaritmo complesso

1.4.1 L'esponenziale, le funzioni trigonometriche e iperboliche in campo complesso

In questo paragrafo si ricordano le definizioni dell'esponenziale, delle funzioni trigonometriche e iperboliche in campo complesso ed alcune proprietà di esse[1].

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ , \\
\mathrm{sen}\,(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ , \\
\cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ , \\
\mathrm{senh}\,(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ , \\
\cosh(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ . \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Da tali relazioni segue imediatamente la "formula di Eulero:

$$\exp(iz) = \cos z + i\mathrm{sen}\, z \ , \qquad \forall\ z \in \mathbb{C} \ . \qquad (4.2)$$

Vale, inoltre, il seguente importante

Teorema 1 (Teorema di addizione) $\exp(z+w) = \exp(z)\ \exp(w)$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$.

Definizione 2 (Pi greco) $\pi := 2\ \inf \Big\{ x > 0 :\ \cos x = 0 \Big\}$.

Teorema 3

(1) *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| = 1$, *esiste un unico* $t \in [0, 2\pi)$ *tale che*

$$\exp(it) = z \ .$$

(2) *per ogni* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *esiste* $w \in \mathbb{C}$ *tale che*

$$\exp(w) = z \ .$$

[1] Per le dimostrazioni si veda W. Rudin *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill 1991 oppure L. Chierchia *Lezioni di Analisi 2*, Aracne 1997.

(3) $\exp(z) = \exp(w)$ *se e solo se esiste* $k \in \mathbb{Z}$ *tale che* $z - w = 2\pi k i$.

Si ricorda anche che, se e denota il numero (trascendente) di Nepero

$$e = \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 2.7182818284590452353602874713526624977572470937... ,$$

allora

$$e^x = \exp(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ . \tag{4.3}$$

1.4.2 Il logaritmo complesso

Poiché, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x) > 0$ (utilizzando il teorema di derivazione di serie di funzioni), si ha che $x \to \exp(x)$ è una funzione strettamente crescente a valori in $(0,\infty)$.

Definizione 4

($*$) *Denotiamo la funzione (reale) inversa di* $x \in \mathbb{R} \to y = \exp(x) \in (0,\infty)$ *con* $\log_* y$.

($**$) *Se* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *poniamo*

$$\log w = \{z :\ \exp(z) = w\}\ , \quad \arg w = \ \mathrm{Im}\ \log w = \{\,\mathrm{Im}\, z : z \in \log w\}\ .$$

Proposizione 5 *Sia* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Esiste un unico* $z = x + iy \in \log w$ *tale che* $y \in [0, 2\pi)$. *Inoltre* $x = \log_* |w|$.

Dimostrazione Per la parte (1) del Teorema 3 esiste un unico $y \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\exp(iy) = \frac{w}{|w|}\ ,$$

e per il teorema di addizione (Teorema 1) e la definizione di $\log_*$

$$\exp(\log_* |w| + iy) = \exp(\log_* |w|)\exp(iy) = |w|\ \frac{w}{|w|} = w\ . \qquad \blacksquare$$

Definizione 6 *La funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $z \in \mathbb{C}$ *della Proposizione 5 si denota* Log w *e si chiama "parte principale del logaritmo di* w*; la funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $y \in [0, 2\pi)$ *della Proposizione 5 si denota* Arg w *e si chiama "argomento principale di* w

Proposizione 7 *Se* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *allora*

$$\log w = \mathrm{Log}\ w + i2\pi\mathbb{Z} = \log_* |w| + i\mathrm{Arg}\ w + i2\pi\mathbb{Z}\ .$$

La dimostrazione è conseguenza immediata della Proposizione 5 e della parte (3) del Teorema 3. $\blacksquare$

Proposizione 8 *Se w_1 e w_2 sono numeri complessi diversi da zero, allora*

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2 \ . \tag{4.4}$$

Si noti che l'uguaglianza in (4.4) è un'uguaglianza tra insiemi.
Dimostrazione Se $z_k \in \log w_k$, allora $\exp(z_k) = w_k$ e, per il teorema di addizione, $\exp(z_1 + z_2) = w_1 w_2$, cioè $z_1 + z_2 \in \log(w_1 w_2)$. Questo dimostra che

$$\log w_1 + \log w_2 \subset \log(w_1 w_2) \ . \tag{4.5}$$

Sia ora $z \in \log(w_1 w_2)$ e si considerino $z_k \in \log w_k$. Si ha allora (per le scelte fatte e per il teorema di addizione)

$$\exp(z) = w_1 w_2 = \exp(z_1 + z_2).$$

Dalla parte (3) del Teorema 3 segue allora che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - (z_1 + z_2) = 2\pi i k$, ovvero, $z = (z_1 + 2\pi i k) + z_2$. Ma $z_1 + 2\pi i k \in \log w_1$ e, dunque, $z \in \log w_1 + \log w_2$, il che dimostra

$$\log(w_1 w_2) \subset \log w_1 + \log w_2 \ .$$

Tale relazione assieme a (4.5) prova l'asserto. ∎

Definizione 9 *Se $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$ definiamo*

$$a^b := \exp(b \log a) = \Big\{ z = \exp(bw) : \ w \in \log a \Big\} \ . \tag{4.6}$$

Osservazione 10 Normalmente, in letteratura, l'esponenziale di un numero complesso $\exp(z)$ si denota, più sinteticamente (ed in vista della relazione 4.3), con e^z.

Esercizio Trovare gli errori:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\log 2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log_* 2 + i2\pi\mathbb{Z})\right) = \pm\sqrt{2} \ ;$$
$$e = e^1 = e^{-i^2} = e^{-i\cdot i} = \left(e^{-i}\right)^i = \left(e^{-i+2\pi i}\right)^i = e^{(-i+2\pi i)i} = e^{1-2\pi} = \frac{e}{e^{2\pi}} \ .$$