(17/3/19)

[Ahlfors] Es 1, Sez 4.2 Cap 3

Si trovi una trasformazione conforme che mappi l'intersezione dei dischi

$$D_1 := \{|z| < 1\}\,, \qquad D_2 := \{|z-1| < 1\}$$

su D_1.

Svolgimento Denotiamo C_j i cerchi ∂D_j e $\Omega := D_1 \cap D_2$.
C_1 e C_2 si intersecano nei punti

$$z_\pm := e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Una mappa di Möbius della forma

$$f(z) = c\,\frac{z - z_-}{z - z_+}\,, \qquad c \in \mathbb{C}$$

trasforma i cerchi C_j in rette (poiché uno dei punti comuni viene "esploso" a ∞), mandando z_- in 0, e poiché f è conforme in z_- l'angolo θ interno al "vertice" viene conservato; dunque (poiché f conserva l'orientamento) f manda Ω in una regione delimitata da due semirette con origine in 0 che formano un angolo θ. Scegliamo c in modo da conservare l'asse di simmetria di Ω cioè la retta $\operatorname{Re} z = 1/2$, ad esempio, in modo tale che $f(1/2) = 1$, ossia:

$$f(z) := -\frac{z - z_-}{z - z_+}\,.$$

Ora, si vede facilmente che $f(0) = z_+$ e $f(1) = z_-$. Quindi (tenendo conto che f conserva l'orientamento) si ha che f trasforma conformemente Ω nella regione delimitata dalle semirette

$$s_\pm := \{z = t\,z_\pm \big|\, t > 0\}\,.$$

Si osservi che poiché l'angolo tra le due semirette, ossia, l'angolo tra z_- e z_+ è θ, si ha che $\theta = 2\pi/3 + 2\pi\mathbb{Z}$.
Sia $g(z) := z^{3/2} = e^{\frac{3}{2}\operatorname{Log} z}$ il ramo analitico della potenza 3/2 definita su $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ che vale 1 in 1: g trasforma in modo conforme Ω nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ (si noti che $g(z_\pm) = \pm i$).
Infinite la mappa

$$h(z) := \frac{z-1}{z+1}$$

trasforma il semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ sul cerchio D_1. Quindi

$$F := h \circ g \circ f$$

mappa conformemente Ω su D_1.