§ 35. Recherche des applications réalisées par des fonctions élémentaires

Dans les problèmes du présent paragraphe on rencontre un grand nombre de domaines dont la configuration est parfois assez compliquée. Certains de ces domaines sont donnés par des figures, d'autres à l'aide des inégalités. Compte tenu de ce fait, convenons sur certaines désignations destinées à abréger l'écriture.

Par le symbole $[a, b]$, où a et b sont des nombres complexes finis, on désigne le segment de droite joignant les points a et b.

Par le symbole $[a, +\infty]$, où a est un nombre réel, on désigne la demi-droite $a \leq z < +\infty$, et par le symbole $[-\infty, a]$ la demi-droite $-\infty < z \leq a$.

C'est pour cela que l'écriture

$$D : \left\{|z|<1, \quad \operatorname{Im} z>0, \quad z \notin \left[\frac{i}{2}, i\right]\right\}$$

signifie que le domaine D représente la moitié supérieure du disque $|z|<1$ muni d'une coupure suivant le segment de droite $[i/2, i]$, tandis que l'écriture

$$D : \{z \notin [-\infty, 0]\}$$

veut dire que D représente le plan complexe entier muni d'une coupure suivant le demi-axe réel négatif.

35.01. Soient $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ et C une constante positive. Trouver les images de chaque ligne des familles indiquées ci-dessous par l'application $w=1/z$:

1. La famille de circonférences $x^2+y^2=Cx$.
2. La famille de droites $y=x+C$.
3. La famille de droites $y=Cx$.

35.02. Soient $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$. Trouver les images de chaque domaine des familles indiquées par l'application $w=1/z$:

1. La famille de disques $x^2+y^2<Cx$ (ici, C est une constante positive).
2. La famille de disques $x^2+y^2<Cx$ (ici, C est une constante négative).
3. La famille de disques $x^2+y^2<Cy$ (ici, C est une constante positive).
4. La famille de demi-plans $y>Cx$ (ici, C est une constante positive).
5. La famille de disques $|z-a|<R$, où a est un point fixé, tandis que la constante positive R vérifie la condition $R<|a|$.
6. La famille de disques $|z-a|<R$, où a est un point fixé, tandis que la constante R vérifie la condition $R>|a|$.

35.03. Trouver l'image du disque $|z-1|<2$ par les applications suivantes:

1. $w=1-2iz$. 2. $w=\dfrac{2iz}{z+3}$. 3. $w=\dfrac{z+1}{z-2}$. 4. $w=\dfrac{z-1}{2z-6}$.

35.04. Trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Re} z<1$ par les applications suivantes:

1. $w=(1+i)z+1$. 2. $w=\dfrac{z}{z-1+i}$. 3. $w=\dfrac{z}{z-2}$.

4. $w=\dfrac{4z}{z+1}$. 5. $w=\dfrac{z-3+i}{z+1+i}$.

35.05. Trouver les images des domaines D donnés ci-dessous par les applications indiquées :

1. D : $\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.
2. D : $\{z \notin [-2, 1]\}$, $w=\dfrac{z+2}{1-z}$.
3. D : $\{|z-i|>1, \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.
4. D : $\{1<|z|<2\}$, $w=\dfrac{2}{z-1}$.

35.06. Rechercher les fonctions homographiques $w(z)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $w(0)=4$, $w(1+i)=2+2i$, $w(2i)=0$.
2. $w(0)=0$, $w(1+i)=2+2i$, $w(2i)=4$.
3. $w(0)=0$, $w(1+i)=\infty$, $w(2i)=2i$.

Trouver l'image du disque $|z-i|<1$ par les applications réalisées par ces fonctions.

35.07. Rechercher les fonctions homographiques $w(z)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $w(i)=2$, $w(\infty)=1+i$, $w(-i)=0$.
2. $w(i)=0$, $w(\infty)=1$, $w(-i)=\infty$.
3. $w(i)=-2$, $w(\infty)=2i$, $w(-i)=2$.

Trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ par les applications réalisées par ces fonctions.

35.08. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le domaine D_1 en vérifiant les conditions indiquées :

1. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ ($|z_0|<1$).
2. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ ($|z_0|<1$, $|w_0|<1$).
3. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ ($\operatorname{Im} z_0>0$).
4. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ ($\operatorname{Im} z_0>0$, $|w_0|<1$).
5. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ ($\operatorname{Im} z_0>0$, $\operatorname{Im} w_0>0$).
6. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(1)=1$, $w(i)=\dfrac{3i-4}{5}$, $w(-1)=-1$.
7. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(i)=i$, $w\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{4i}{5}$.
8. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
9. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=i$, $w(-1)=1$, $w(\infty)=-1$.

10. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=-i$, $w(2i)=\frac{i}{3}$.

11. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\pi$.

12. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-1)=0$, $w(0)=2$, $w(1)=\infty$.

13. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-1)=-2$, $w(-2+i)=1+3i$.

14. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(1+i)=i$, $\arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

15. D : $\{|z-1-i|<2\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=\frac{\pi}{2}$.

16. D : $\{\operatorname{Re} z>-1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=0$, $\arg w'(0)=\pi$.

35.09. Trouver la forme générale de la représentation conforme des domaines ci-dessous sur la couronne $1<|w|<R$:

1. $|z-3|>9$, $|z-8|<16$. 2. $|z-5|>4$, $\operatorname{Re} z>0$.

35.10. Trouver les images des lignes ci-dessous par l'application $w=z^2$:

1. $\arg z=\alpha$ $(-\pi<\alpha\leq\pi)$. 2. $\operatorname{Re} z=a$ $(a>0)$.

3. $\operatorname{Im} z=a$ $(a>0)$. 4. $|z|=\varrho$, $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$.

35.11. Trouver les images des domaines ci-dessous par l'application $w=z^2$

1. $\operatorname{Im} z>0$. 2. $\operatorname{Re} z>0$. 3. $\pi<\arg z<\frac{3\pi}{2}$.

4. $|z|<1$, $\frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$. 5. $\operatorname{Im} z<-1$.

6. $\operatorname{Re} z>1$. 7. $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

8. $|z|>\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} z>0$.

35.12. Trouver les images des domaines D donnés ci-dessous par l'application de la branche régulière de la fonction $w=\sqrt{z}$ séparée par la valeur de cette dernière au point indiqué :

1. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{z}|_{z=i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. D : $\{\operatorname{Re} z>0\}$, $\sqrt{z}|_{z=1}=1$.

3. D : $\{z\notin[0,+\infty]\}$, $\sqrt{z}|_{z=-1}=-i$.

4. D : $\{z\notin[-\infty,+1]\}$, $\sqrt{z}|_{z=4}=2$.

5. D : $\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{z}\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{1+i}{2}$.

6. D : $\left\{|z|>1, \frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{z}|_{z=-1}=i$.

7. D : $\{(\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $\sqrt{z}|_{z=-1}=-i$.

8. D : $\{\operatorname{Im} z>0, (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$, $\sqrt{z}|_{z=-1}=i$.

35.13. Trouver les images des ensembles E indiqués par les applications correspondantes :

1. E : $\left\{\arg z=\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^3$.

2. E : $\left\{|z|=1, \frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^4$.

3. E : $\{|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0\}$, $w=z^{3/2}$, $w\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1-i}{4}$.

4. E : $\{|z|>4$, $\operatorname{Re} z>0\}$, $w=z^{-3/2}$, $w(9)=-\frac{1}{27}$.

5. E : $\left\{|\arg z|<\frac{\pi}{8}, z\notin[0, 1]\right\}$, $w=z^8$.

35.14. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 37 à 51 sur le demi-plan dm $w>0$.

35.15. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme u domaine

$$y^2>4(x+1) \quad (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$$

sur le disque $|w|<1$ et qui satisfait aux conditions :

$$w(-4)=0, \quad \arg w'(-4)=0.$$

35.16. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de l'angle $|\arg z|<\pi/4$ sur le disque $|w|<1$ et satisfait aux conditions :

$$w(1)=0, \quad \arg w'(1)=\pi.$$

35.17. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ muni d'une coupure suivant le segment $[0, i]$ sur le disque $|w|<1$ et qui satisfait aux conditions :

$$w\left(\frac{5i}{4}\right)=0, \quad w(i)=-i.$$

* * *

35.18. Trouver les images des lignes ci-dessous par l'application réalisée par la fonction $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$:

1. $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$. 2. $|z|=1$, $-\frac{3\pi}{4}<\arg z<-\frac{\pi}{4}$.

3. $|z|=2$. 4. $|z|=\frac{1}{2}$. 5. $\arg z=\frac{\pi}{4}$.

6. $\arg z=\frac{3\pi}{4}$.

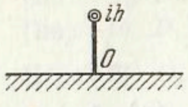

Fig. 37

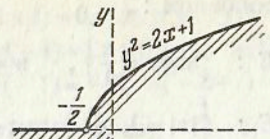

Fig. 38

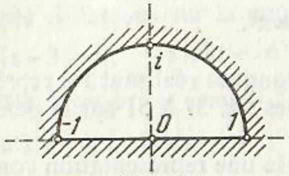

Fig. 39

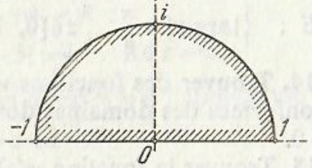

Fig. 40

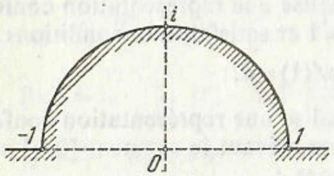

Fig. 41

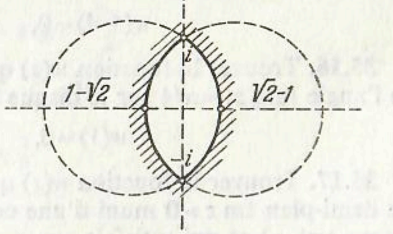

Fig. 42

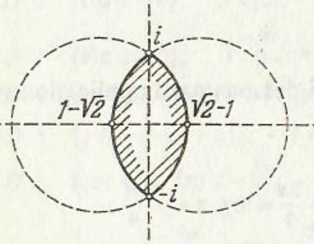

Fig. 43

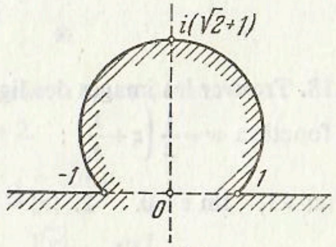

Fig. 44

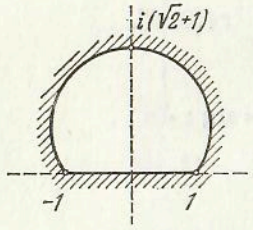

Fig. 45

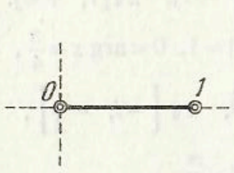

Fig. 46

Fig. 47

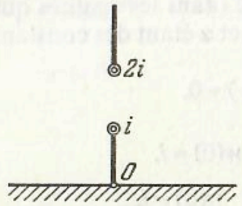

Fig. 48

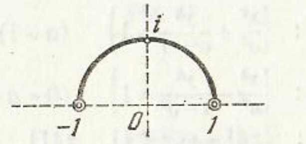

Fig. 49

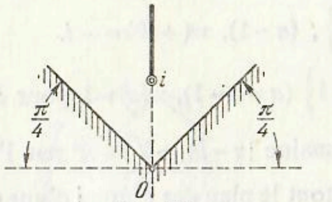

Fig. 50

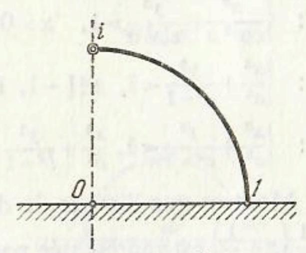

Fig. 51

35.19. Trouver les images des domaines ci-dessous par l'application réalisée par la fonction $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$:

1. $|z|>2$. 2. $|z|<\frac{1}{2}$. 3. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$.
4. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $z\notin[0,\ i]$. 5. $|z|<1$, $z\notin[0,\ 1]$.
6. $|z|>1$, $z\notin[-2,\ -1]$, $z\notin[1,\ +\infty]$.
7. $\operatorname{Im} z>0$, $z\notin\left\{|z|=1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$.
8. $|z|<1$, $\operatorname{Im} z<0$, $z\notin\left[-i,\ -\frac{i}{2}\right]$.
9. $|z|<1$, $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.
10. $|z|<1$, $-\frac{3\pi}{4}<\arg z<-\frac{\pi}{4}$.

35.20. Trouver les images des domaines D ci-dessous par l'application réalisée par la branche régulière de la fonction $w=z+\sqrt{z^2-1}$ séparée par la valeur de cette dernière au point indiqué (dans les égalités qui définissent le domaine, on pose $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, a, b et α étant des constantes réelles) :

1. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}>1\right\}$ $(a>1)$, $w(\infty)=0$.
2. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}<1\right\}$ $(0<a<1)$, $w(0)=i$.
3. D : $\{z\notin[-\infty,\ -1],\ z\notin[1,\ +\infty]\}$, $w(0)=i$.
4. D : $\{z\notin[-1,\ 1]\}$, $w(\infty)=\infty$.
5. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $w(+i\infty)=0$.
6. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ y>0\right\}$, $(a>1)$, $w(+i0)=i$.
7. D : $\left\{\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}>1,\ x>0,\ y>0\right\}$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ $w(+\infty)=0$.
8. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ z\notin[-1,\ 1]\right\}$, $(a>1)$, $w(+i0)=-i$.
9. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-1}>1\right\}$ $(a>b>1)$, $w(z)>1$ pour $b<z<a$.

35.21. Montrer que l'image du domaine $|z-ih|>\sqrt{1+h^2}$ par l'application $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ est représentée par tout le plan des w muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence dont les extrémités se situent aux points $w=\pm 1$ et qui passe par le point $w=ih$.

35.22. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 52 à 67 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

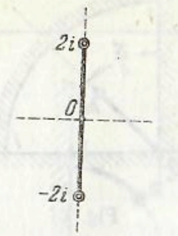

Fig. 52

Fig. 53

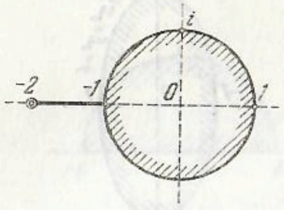

Fig. 54

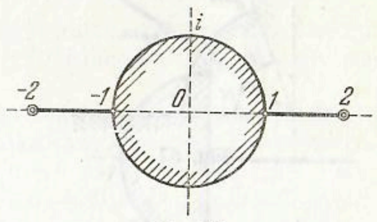

Fig. 55

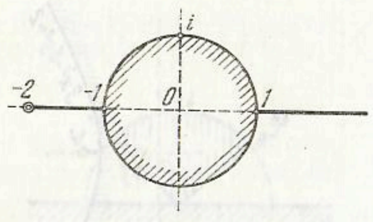

Fig. 56

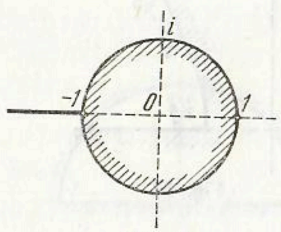

Fig. 57

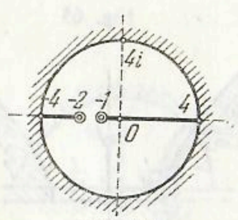

Fig. 58

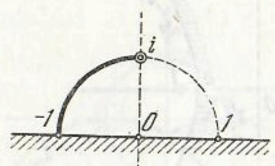

Fig. 59

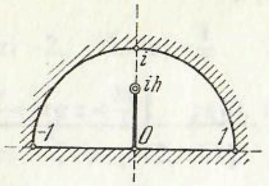

Fig. 60

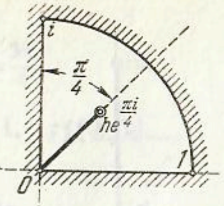

Fig. 61

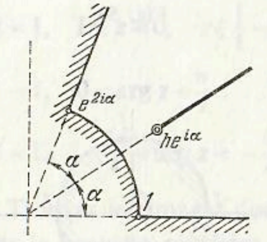

Fig. 62

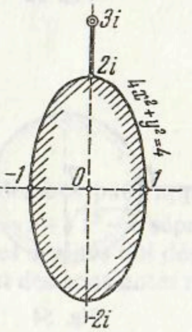

Fig. 63

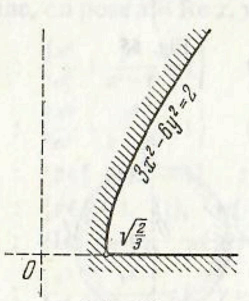

Fig. 64

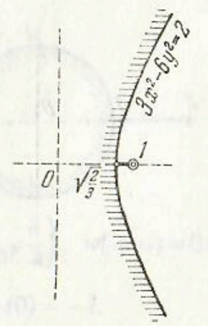

Fig. 65

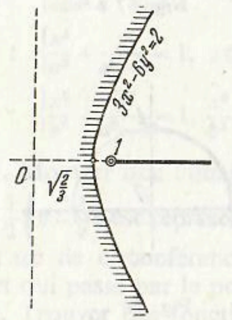

Fig. 66

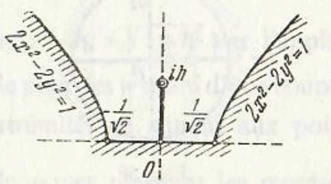

Fig. 67

35.23. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 68 à 75 sur le disque $|w| < 1$.

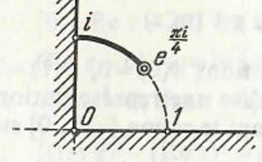

Fig. 68

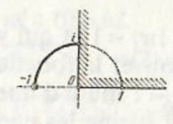

Fig. 69

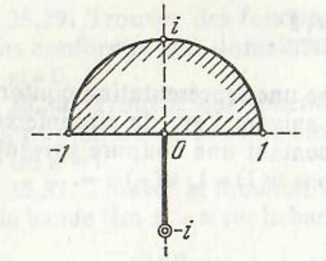

Fig. 70

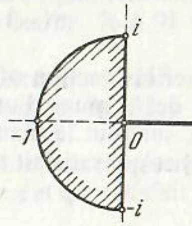

Fig. 71

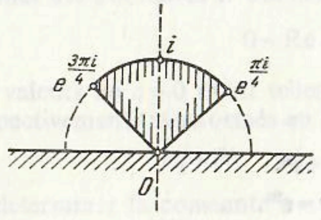

Fig. 72

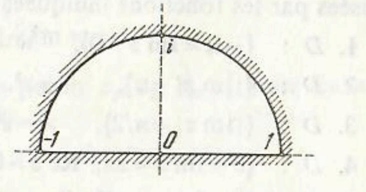

Fig. 73

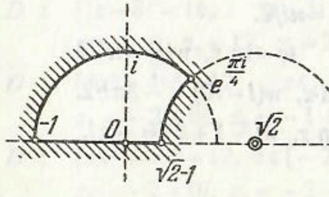

Fig. 74

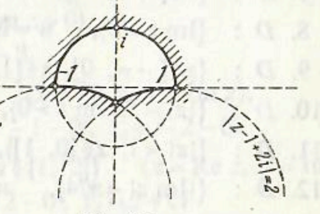

Fig. 75

35.24. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du demi-disque $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions

$$w\left(\frac{i}{2}\right)=0, \ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=0.$$

35.25. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du domaine

$$x^2-y^2<1 (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$$

sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions $w(0)=0$, $w(1)=1$.

35.26. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du disque $|z|<1$ muni d'une coupure suivant le rayon $[-1, 0]$ sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions

$$w(1)=-1,\ w(-1+i0)=\frac{7-4i\sqrt{2}}{9},$$

$$w(-1-i0)=\frac{7+4i\sqrt{2}}{9}.$$

35.27. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de tout le plan des z muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$, sur tout le plan des w présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$ et qui satisfait aux conditions $w(1)=1$, $w(\infty)=\infty$.

* * *

35.28. Trouver les images des domaines D ci-dessous par les applications réalisées par les fonctions indiquées :

1. D : $\{-\pi<\operatorname{Im} z<0\}$, $\quad w=e^z$.
2. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi\}$, $\quad w=e^z$.
3. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi/2\}$, $\quad w=e^z$.
4. D : $\{0<\operatorname{Im} z<2\pi,\ \operatorname{Re} z>0\}$, $\quad w=e^z$.
5. D : $\{0<\operatorname{Im} z<\pi/2,\ \operatorname{Re} z>0\}$, $\quad w=e^{2z}$.
6. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=e^{iz}$.
7. D : $\{z\notin[0, +\infty]\}$, $\quad w=\ln z$, $w(-1)=-\pi i$.
8. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=\ln z$, $w(i)=\pi i/2$.
9. D : $\{z\notin[-\infty, 0],\ z\notin[1, +\infty]\}$, $\quad w=\ln z$, $w(i)=\pi i/2$.
10. D : $\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=\ln z$, $w(i-i0)=-3\pi i/2$.
11. D : $\{|z|<1,\ z\notin[0, 1]\}$, $\quad w=\ln z$, $w(-1+0)=-\pi i$.
12. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi/4\}$, $\quad w=\operatorname{th} z$.
13. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi\}$, $\quad w=\operatorname{tg} z$.
14. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi/4\}$, $\quad w=\operatorname{ctg} z$.

15. D : $\{0<\operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=\operatorname{tg} \pi z$.
16. D : $\{0<\operatorname{Im} z<\pi\}$, $\quad w=\operatorname{ch} z$.
17. D : $\{\operatorname{Re} z>0,\ -1<\operatorname{Im} z<0\}$, $\quad w=\operatorname{ch} \pi z$.
18. D : $\left\{\operatorname{Re} z>0,\ 0<\operatorname{Im} z<1,\ z\notin\left[\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right]\right\}$, $\quad w=\operatorname{ch} \pi z$.
19. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi,\ \operatorname{Re} z>0\}$, $\quad w=\operatorname{sh} z$.
20. D : $\{0<\operatorname{Re} z<2\pi,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=\sin z$.
21. D : $\{\operatorname{Re} z>0\}$, $\quad w=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $\quad w(+0)=\pi i$.
22. D : $\{\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\quad w=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $\quad w(2)>0$.
23. D : $\left\{(\operatorname{Im} z)^2-(\operatorname{Re} z)^2\le\frac{1}{2}\right\}$, $\quad w=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $\quad w(0)=2\pi i$.
24. D : $\{z\notin[-\infty, -1],\ z\notin[1, +\infty]\}$, $\quad w=\arcsin z$, $w(0)=0$.

35.29. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 76 à 91 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

35.30. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 92 à 97 sur la bande $0<\operatorname{Im} w<1$.

35.31. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de la bande $|\operatorname{Im} z|<\pi$ sur la bande $|\operatorname{Im} w|<\pi$ et qui satisfait aux conditions :

$$w(\pi i)=+\infty,\quad w(+\infty)=-\pi i,\quad w(-\pi i)=-\infty.$$

35.32. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes des domaines D donnés ci-dessous sur le rectangle

$$0<\operatorname{Re} w<1,\ 0<\operatorname{Im} w<a,$$

les valeurs de $a>0$ étant telles que les points z_1, z_2, z_3, z_4 indiqués soient respectivement transformés en les points

$$w_1=0,\quad w_2=1,\quad w_3=1+ai,\quad w_4=ai,$$

et déterminer la constante a :

1. D : $\{1<|z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\}$,
   $z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=-2,\ z_4=-1$.
2. D : $\{|z-8|<16,\quad |z-3|>9,\quad \operatorname{Im} z>0\}$,
   $z_1=-6,\ z_2=12,\ z_3=24,\ z_4=-8$.
3. D : $\{3x^2+4y^2<12,\quad z\notin[-2, 1]\}$ $\quad (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$,
   $z_1=-2+0i,\ z_2=-1+0i,\ z_3=-1-0i,\ z_4=-2-0i$.
4. D : $\{3x^2+4y^2<12,\ z\notin[-2, -1],\ z\notin[1, 2]\}$ $\quad (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$,
   $z_1=-2+0i,\ z_2=-2-0i,\ z_3=2-0i,\ z_4=2+0i$.

* * *

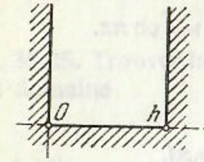

Fig. 76

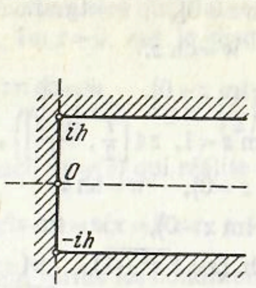

Fig. 77

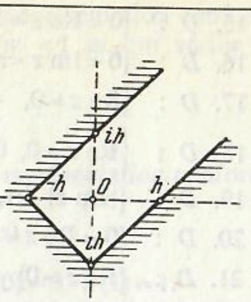

Fig. 78

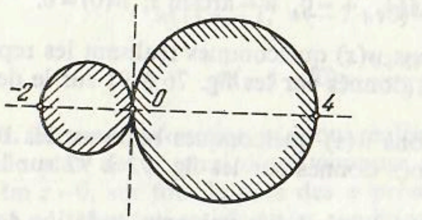

Fig. 79

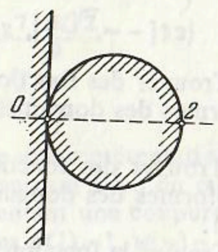

Fig. 80

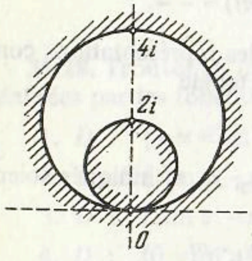

Fig. 81

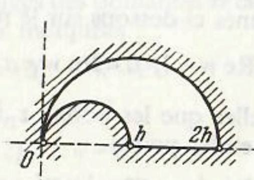

Fig. 82

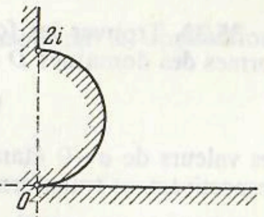

Fig. 83

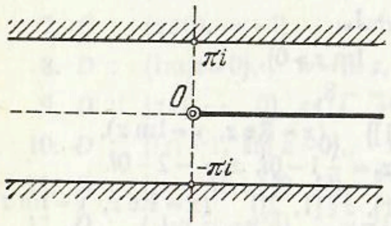

Fig. 84

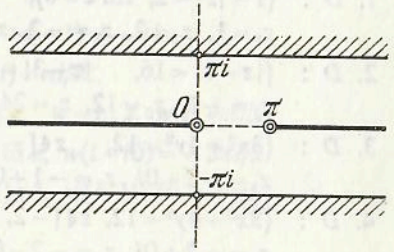

Fig. 85

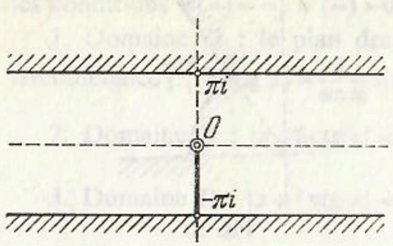

Fig. 86

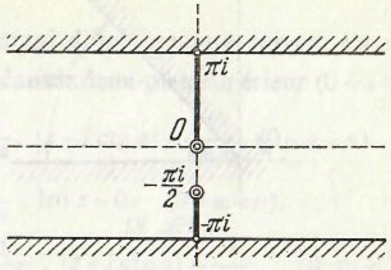

Fig. 87

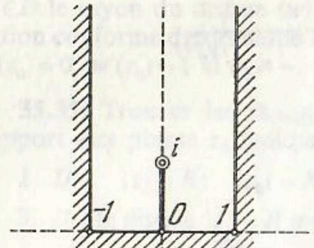

Fig. 88

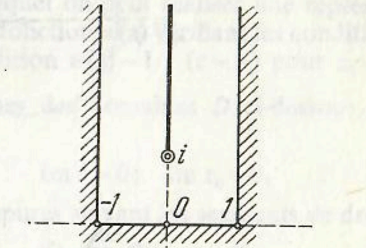

Fig. 89

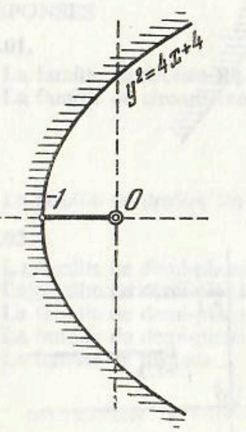

Fig. 90

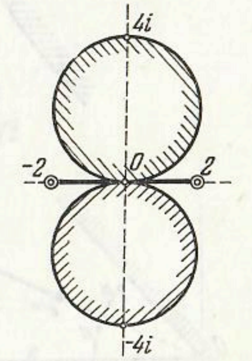

Fig. 91

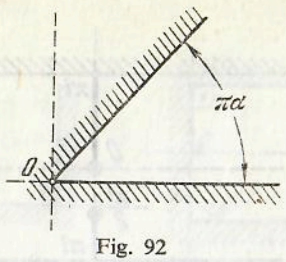

Fig. 92

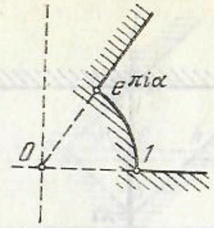

Fig. 93

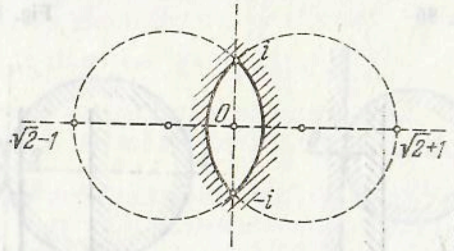

Fig. 94

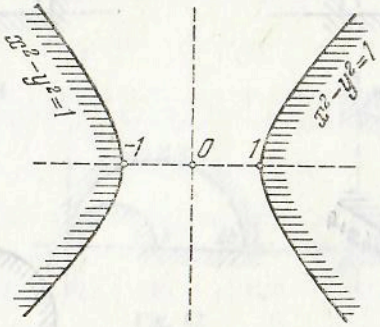

Fig. 95

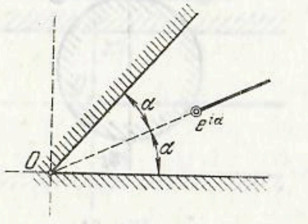

Fig. 96

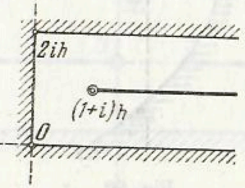

Fig. 97

35.33. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes des domaines D ci-dessous sur le domaine $|w|<1$ et qui vérifient les conditions $w(\infty)=\infty$, $w'(\infty)>0$:

1. Domaine D : le plan des z muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|=\dfrac{1}{\sin\alpha}$ situé dans le demi-plan supérieur $(0<\alpha<\pi)$.

2. Domaine D : $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|<\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $|z-i\operatorname{ctg}\alpha|<\dfrac{1}{\sin\alpha}$ $\quad(0<\alpha<\pi)$.

3. Domaine D : $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|<\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{Im} z>0$ $\quad(0<\alpha<\pi)$.

4. Domaine D : $|z+i\operatorname{ctg}2\alpha|<\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$, $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|>\dfrac{1}{\sin\alpha}$ $\quad\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$.

35.34. Trouver $w'(\infty)$ pour les fonctions $w(z)$ du problème 35.33.

On appelle *rayon conforme* d'un domaine D par rapport à un point $z_0\in D$ le rayon du disque $|w|<R$ sur lequel on peut réaliser une représentation conforme du domaine D par une fonction $w(z)$ vérifiant les conditions $w(z_0)=0$, $w'(z_0)=1$ si $z_0\neq\infty$, et la condition $w(z)\sim 1/z$ $(z\to\infty)$ pour $z_0=\infty$.

35.35. Trouver les rayons conformes des domaines D ci-dessous par rapport aux points z_0 indiqués:

1. D : $|z|<R$; $|z_0|<R$. 2. D : $\operatorname{Im} z>0$; $\operatorname{Im} z_0=0$.

3. D : le disque $|z|<R$ muni de coupures suivant les segments de droite

$$[re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}],\ [-re^{i\alpha},\ -Re^{i\alpha}] \quad (0<r<R);\quad z_0=0.$$

4. D : l'extérieur du segment de droite $[a,b]$; $z_0=\infty$.

5. D : l'extérieur d'un arc de circonférence correspondant à l'angle au centre 2α et ayant pour extrémités les points $z=a$ et $z=b$; $z_0=\infty$.

RÉPONSES

35.01.

1. La famille de droites $\operatorname{Re} w=1/C$.
2. La famille de circonférences

$$\left|w+\frac{1+i}{2C}\right|=\frac{1}{C\sqrt{2}}.$$

3. La famille de droites $\operatorname{Im} w=-C\operatorname{Re} w$.

35.02.

1. La famille de demi-plans $\operatorname{Re} w>1/C$.
2. La famille de demi-plans $\operatorname{Re} w<1/C$.
3. La famille de demi-plans $\operatorname{Im} w<-1/C$.
4. La famille de demi-plans $\operatorname{Im} w<-C\operatorname{Re} w$.
5. La famille de disques

$$\left|w-\frac{|a|^2}{a(|a|^2-R^2)}\right|<\frac{R}{|a|^2-R^2}.$$

6. La famille de disques

$$\left|w-\frac{|a|^2}{a(|a|^2-R^2)}\right|>\frac{R}{R^2-|a|^2}.$$

35.03.

1. $|w-1+2i|<4$. 2. $|w|<1$. 3. $|w-2|>4$. 4. $\operatorname{Re} w<1/4$.

35.04.

1. $\operatorname{Re} w+\operatorname{Im} w<3$. 2. $\operatorname{Re} w-\operatorname{Im} w<1$.
3. $|w|<1$. 4. $|w-3|>1$. 5. $|w|>1$.

35.05.

1. $-\dfrac{\pi}{2}<\arg w<0$. 2. $w\notin[0,\ +\infty]$.
3. $-1/2<\operatorname{Im} w<0$. 4. $\operatorname{Re} w>-1,\ |w-2/3|>4/3$.

35.06.

1. $w=2iz+4,\ |w-2|<2$. 2. $w=\dfrac{2z}{z-1},\ |w-2|>2$.
3. $w=\dfrac{(1-i)z}{z-1-i},\ \operatorname{Re} w>0$.

35.07.

1. $w=(1+i)\dfrac{z+i}{z-i}\quad |w-1|>1$. 2. $w=\dfrac{z-i}{z+i},\ \operatorname{Im} w>0$.
3. $w=2i\dfrac{z-1}{z+1},\ |w|<2$.

35.08.

1. $w=\dfrac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}\,e^{i\alpha}$. 2. $w=\dfrac{(e^{i\alpha}-w_0z_0)z+w_0-z_0e^{i\alpha}}{(w_0e^{i\alpha}-\overline{z}_0)z+1-\overline{w}_0z_0e^{i\alpha}}$.
3. $w=i\,\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\,e^{i\alpha}$. 4. $w=\dfrac{(w_0+ie^{i\alpha})z-\overline{z}_0w_0-iz_0e^{i\alpha}}{(1+i\overline{w}_0e^{i\alpha})z-\overline{z}_0-iz_0\overline{w}_0e^{i\alpha}}$.
5. $w=\dfrac{(w_0-\overline{w}_0e^{i\alpha})z+z_0\overline{w}_0e^{i\alpha}-w_0\overline{z}_0}{(1-e^{i\alpha})z+z_0e^{i\alpha}-\overline{z}_0}$. 6. $w=\dfrac{2z-1}{2-z}$.
7. $w=\dfrac{2z+i}{2-iz}$. 8. $w=\dfrac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$. 9. $w=\dfrac{i-1-z}{z+1+i}$.
10. $w=\dfrac{iz+1}{z+i}$. 11. $w=\dfrac{i-1-iz}{z-1+i}$. 12. $w=\dfrac{2z+2}{1-z}$.
13. $w=\dfrac{z-1}{z+2}$. 14. $w=\dfrac{z}{2-z}$. 15. $w=\dfrac{2iz+2}{z+3-i}$.
16. $w=-\dfrac{z}{z+2}$.

35.09.

1. $w=e^{i\alpha}\cdot\dfrac{3z}{z+24},\ \operatorname{Im}\alpha=0$. 2. $w=2e^{i\alpha}\cdot\dfrac{z-3}{z+3},\ \operatorname{Im}\alpha=0$.

35.10.

1. $\arg w=2\alpha$. 2. $\operatorname{Re} w=a^2-\dfrac{1}{4a^2}\ (\operatorname{Im} w)^2$.
3. $\operatorname{Re} w=-a^2+\dfrac{1}{4a^2}\ (\operatorname{Im} w)^2$. 4. $|w|=\varrho^2,\ \operatorname{Re} w>0$.

35.11.

1. $w\notin[0,\ +\infty]$. 2. $w\in[-\infty,\ 0]$.
3. $\operatorname{Im} w>0$. 4. $|w|<1,\ \dfrac{\pi}{2}<\arg w<\pi$.
5. $\operatorname{Re} w<-1+\dfrac{1}{4}\ (\operatorname{Im} w)^2$. 6. $\operatorname{Re} w>1-\dfrac{1}{4}\ (\operatorname{Im} w)^2$.
7. $|w|<4,\ \operatorname{Im} w>0$. 8. $|w|>\dfrac{1}{4},\ w\notin\left[-\infty,\ -\dfrac{1}{4}\right]$.

35.12.

1. $-\pi<\arg w<-\pi/2$. 2. $|\arg w|<\pi/4$.
3. $\operatorname{Im} w<0$. 4. $\operatorname{Re} w>0,\quad w\notin[0,\ 1]$.
5. $|w|<1,\ 0<\arg w<\pi/2$. 6. $|w|>1,\ |\pi/2-\arg w|<\pi/8$.
7. $\operatorname{Im} w<-\sqrt{2}/2$. 8. $\operatorname{Re} w>0,\ \operatorname{Im} w>1$.

35.13.

1. $\arg w=3\pi/4$. 2. $|w|=1,\ \pi/2<\arg w<\pi$.
3. $|w|<1,\ -\pi<\arg w<\pi/2$. 4. $|w|<1/8,\ |\pi-\arg w|<3\pi/4$.
5. $w\notin[-\infty,\ 1]$.

35.14.

1. Fig. 37 : $w=\sqrt{z^2+h^2}$. 2. Fig. 38 : $w=\left(\sqrt{z}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$.
3. Fig. 39 : $w=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$. 4. Fig. 40 : $w=\left(i\,\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2/3}$.
5. Fig. 41 : $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$. 6. Fig. 42 : $w=i\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2$.
7. Fig. 43 : $w=i\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{2/3}$. 8. Fig. 44 : $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4$.
9. Fig. 45 : $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{4/5}$. 10. Fig. 46 : $w=\sqrt{\dfrac{z}{1-z}}$.
11. Fig. 47 : $w=\sqrt{\dfrac{z}{z-i}}$. 12. Fig. 48 : $w=\sqrt{\dfrac{z^2+4}{z^2+1}}$.
13. Fig. 49 : $w=e^{\pi i/4}\sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$. 14. Fig. 50 : $w=\dfrac{z^2}{\sqrt{z^4-1}}$.
15. Fig. 51 : $w=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$.

35.15.

$$w=\frac{2i-\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

35.16.

$$w=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

35.17.

$$w=\frac{3+4i\sqrt{z^2+1}}{3i+4\sqrt{z^2+1}}.$$

35.18.

1. $\operatorname{Im} w=0,\ -1<\operatorname{Re} w<1.$

2. $\operatorname{Im} w=0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1 \quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w).$

4. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1 \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} v).$

5. $u^2-v^2=1/2,\ u>0 \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} v).$

6. $u^2-v^2=1/2,\ u<0 \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} w).$

35.19.

1. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1 \quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w).$

2. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1 \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} w).$

3. $u^2-v^2<1/2(u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} w).$

4. $u^2-v^2<1/2,\quad w\notin[-i\infty,\ 0] \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} w).$

5. $w\notin[-1,\ +\infty].$ 6. $w\notin\left[-\frac{5}{4},\ +\infty\right].$

7. $w\notin\left[-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\quad w\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right].$

8. $\operatorname{Im} w>0,\quad w\notin\left[0,\ \frac{3i}{4}\right].$ 9. $-\frac{\pi}{2}<\arg w<0.$

10. $u^2-v^2<\frac{1}{2},\quad v>0 \quad (u=\operatorname{Re} w,\quad v=\operatorname{Im} w).$

35.20.

1. $|w|<a-\sqrt{a^2-1},$ 2. $\alpha<\arg w<\pi-\alpha,\ \alpha=\arcsin\sqrt{1-a^2}.$

3. $\operatorname{Im} w>0.$ 4. $|w|>1.$

5. $|w|<1,\quad \operatorname{Im} w<0.$ 6. $1<|w|<a+\sqrt{a^2-1},\ \operatorname{Im} w>0.$

7. $|w|<1,\ -\alpha<\arg w<0.$ 8. $a-\sqrt{a^2-1}<|w|<1.$

9. $b+\sqrt{1+b^2}<|w|<a+\sqrt{1+a^2}.$

35.22.

1. Fig. 52 : $w=i\frac{2+\sqrt{z^2+4}}{z}.$ 2. Fig. 53 : $w=z-1+\sqrt{z^2-2z-8}.$

3. Fig. 54 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{-z^2+2z-1}}.$

4. Fig. 55 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{-2z^2+5z-2}}.$ 5. Fig. 56 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{z}}.$

6. Fig. 57 : $w=i\frac{z-1}{\sqrt{z}}.$ 7. Fig. 58 : $w=\sqrt{\frac{z^2+10z+16}{z^2+17z+16}}.$

8. Fig. 59 : $w=\frac{\sqrt{z^2+1}}{z-1}.$ 9. Fig. 60 : $w=\sqrt{1+\frac{z^2(1-h^2)^2}{h^2(1+z^2)^2}}.$

10. Fig. 61 : $w=\sqrt{1+\frac{z^4(1-h^4)^2}{h^4(1+z^4)^2}}.$

11. Fig. 62 : $w=\sqrt{1+\frac{z^{\pi/\alpha}(1-h^{\pi/\alpha})^2}{h^{\pi/\alpha}(1+z^{\pi/\alpha})^2}}.$

12. Fig. 63 : $w=\frac{1}{\zeta-1}\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{3}}-\zeta^2-4\zeta-1},\ \zeta=\frac{i}{3}\left(z+\sqrt{z^2+3}\right).$

13. Fig. 64 : $w=\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\pi/\alpha}+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{\pi/\alpha},\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

14. Fig. 65 : $w=i\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\pi/2\alpha}-\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{\pi/2\alpha}\right],\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

15. Fig. 66 : $w=\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\pi/\alpha},\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

16. Fig. 67 : $w=\sqrt{h^2(1+h^2)-z^2(z^2-1)}.$

35.23.

1. Fig. 68 : $w=\frac{z^2+i(z^2-1)\sqrt{z^4-1}}{z^4-z^2+1}.$

2. Fig. 69 : $w=\frac{3\zeta-2i(\zeta+1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2+\zeta+2},\quad \zeta=(-iz)^{2/3}.$

3. Fig. 70 : $w=\frac{3\zeta-2i(1-\zeta)\sqrt{\zeta^2+\zeta+1}}{2\zeta^2-\zeta+2},\quad \zeta=\left(i\frac{z+1}{z-1}\right)^{2/3}.$

4. Fig. 71 : $w=\frac{\zeta-2i(\zeta-1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2-3\zeta+2},\quad \zeta=\left(\frac{1-iz}{z-i}\right)^{2/3}.$

5. Fig. 72 : $w=\frac{\zeta-2i(\zeta-1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2-3\zeta+2},\quad \zeta=\left(\frac{1-iz^2}{z^2-i}\right)^{2/3}.$

6. Fig. 73 : $w=\frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}.$

7. Fig. 74 : $w=\frac{\zeta^2+2i\zeta+1}{\zeta^2-2i\zeta+1},\quad \zeta=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$

8. Fig. 75 : $w=\frac{\zeta^3-2\zeta^{3/2}-1}{\zeta^3+2\zeta^{3/2}-1},\quad \zeta=\frac{(2-\sqrt{3})z+i}{z+(2-\sqrt{3})i}.$

35.24.

$$w=\frac{2i(1+z^2)-3z}{3iz-2(1+z^2)}.$$

35.25.

$$w=\frac{2-i2+(z+\sqrt{z^2-2})^2}{2+i2-(z+\sqrt{z^2-2})^2}.$$

35.26.

$$w=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{z}-z\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{z}-z\sqrt{2}}.$$

35.27.

$$w=\frac{1+i}{4z}\left[(z+1)(z-i)+(z-1)\sqrt{z^2-1}\right].$$

35.28.

1. $\operatorname{Im} w<0$. 2. $w\notin[-\infty, 0]$.
3. $\operatorname{Re} w>0$. 4. $|w|>1$, $w\notin[1, +\infty]$.
5. $|w|>1$, $\operatorname{Im} w>0$. 6. $|w|<1$, $\operatorname{Im} w>0$.
7. $-2\pi<\operatorname{Im} w<0$. 8. $0<\operatorname{Im} w<\pi$.
9. $|\operatorname{Im} w|<\pi$, $w\notin[0, +\infty]$. 10. $|3\pi/2+\operatorname{Im} w|<\pi/2$, $\operatorname{Re} w<0$.
11. $-2\pi<\operatorname{Im} w<0$, $\operatorname{Re} w<0$. 12. $|w|<1$.
13. $w\notin[-i, i]$. 14. $|w|>1$, $\operatorname{Re} w>0$.
15. $\operatorname{Im} w>0$, $w\notin[0, i]$. 16. $w\notin[-\infty, -1]$, $w\notin[1, +\infty]$.
17. $\operatorname{Im} w<0$. 18. $\operatorname{Im} w>0$, $w\notin[0, \operatorname{sh}\pi/2]$.
19. $w\notin[-\infty, 0]$, $w\notin[-i, i]$. 20. $w\notin[-1, 1]$, $w\notin[0, +i\infty]$.
21. $\pi/2<\operatorname{Im} w<3\pi/2$, $\operatorname{Re} w<0$. 22. $0<\operatorname{Im} w<\pi/2$, $\operatorname{Re} w>0$.
23. $7\pi/4<\operatorname{Im} w<9\pi/4$, $\operatorname{Re} w>0$. 24. $|\operatorname{Re} w|<\pi/2$.

35.29.

1. Fig. 76 : $w=-\cos\dfrac{\pi z}{h}$. 2. Fig. 77 : $w=i\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2h}$.

3. Fig. 78 : $w=i\operatorname{sh}\dfrac{\pi(z-iz+h)}{2h}$. 4. Fig. 79 : $w=\exp\left(\dfrac{4\pi i}{3z}+\dfrac{2\pi i}{3}\right)$.

5. Fig. 80 : $w=\exp(2\pi i/z)$. 6. Fig. 81 : $w=\exp(4\pi/z)$.

7. Fig. 82 : $w=-\cos\dfrac{2\pi h}{z}$. 8. Fig. 83 : $w=-\operatorname{ch} 2\pi/z$.

9. Fig. 84 : $w=\sqrt{1-e^{-z}}$. 10. Fig. 85 : $w=\sqrt{\dfrac{e^z-e^\pi}{e^z-1}}$.

11. Fig. 86 : $w=\sqrt{1-\dfrac{i}{\operatorname{sh}\dfrac{z}{2}}}$. 12. Fig. 87 : $w=\sqrt{1+\dfrac{i}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\dfrac{z}{2}}}$.

13. Fig. 88 : $w=\sqrt{\sin^2\dfrac{\pi z}{2}+\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}$.

14. Fig. 89 : $w=\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi z}{2}}}$. 15. Fig. 90 : $w=i\operatorname{sh}\dfrac{\pi\sqrt{z}}{2}$.

16. Fig. 91 : $w=\sqrt{\dfrac{e^{2\pi}-\exp\dfrac{4\pi}{z}}{e^{-2\pi}-\exp\dfrac{4\pi}{z}}}$.

35.30.

1. Fig. 92 : $w=\dfrac{1}{\pi\alpha}\ln z$. 2. Fig. 93 : $w=\dfrac{1}{\pi}\ln(z^{1/\alpha}+z^{-1/\alpha})$.

3. Fig. 94 : $w=\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{z+i}{i-z}+\dfrac{i}{2}$.

4. Fig. 95 : $w=\dfrac{2}{\pi}\ln\left(z+\sqrt{z^2-2}\right)-\dfrac{i}{2}$.

5. Fig. 96 : $w=-\dfrac{1}{2\pi}\ln(1+z^{-\pi/\alpha})$.

6. Fig. 97 : $w=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{\operatorname{sh}^2\pi/2}{\operatorname{ch}^2\pi z/2h}\right)$.

35.31.

$$w=2\ln\frac{i+e^{z/2}}{1+ie^{z/2}}.$$

35.32.

1. $a=\dfrac{\pi}{\ln 2}$, $w=\dfrac{\ln z}{\ln 2}$. 2. $a=\dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{3}{2}$, $w=\dfrac{i}{\pi}\ln\dfrac{-3z}{z+24}$.

3. $a=\dfrac{2\pi}{\ln(2+\sqrt{3})}$, $w=-\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\ln\dfrac{\sqrt{z^2-1}-z}{2+\sqrt{3}}$.

4. $a=\dfrac{\pi}{\ln(2+\sqrt{3})}$, $w=\dfrac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\dfrac{\sqrt{z^2-1}-z}{2+\sqrt{3}}$.

35.33.

1. $w=\dfrac{\sqrt{z+1}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}+\sqrt{z-1}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}}$.

2. $w=\dfrac{(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}+(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}}{(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}-(z-1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}}$.

3. $w=-i\dfrac{(z+1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}e^{\frac{2\pi^2 i}{3\pi+2\alpha}}-(z-1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}e^{-\frac{2\pi^2 i}{3\pi+2\alpha}}}{(z+1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}-(z-1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}}$.

4. $w=-i\dfrac{(z+1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}e^{\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}i}-(z-1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}e^{-\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}i}}{(z+1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-(z-1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}$.

35.34.

1. $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. 2. $2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)$.

3. $\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\frac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}$. 4. $\left(2-\frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}$.

35.35.

1. $\frac{R^2-|z_0|^2}{R}$. 2. $2\,\mathrm{Im}\,z_0$. 3. $\frac{R^2+r^2}{2r}$.

4. $\frac{|b-a|}{4}$. 5. $\frac{|b-a|}{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.