6 $\mathbb{C}$ e il teorema fondamentale dell'algebra

6.1 $\mathbb{R}^2$ e i numeri complessi

(a) ($\mathbb{R}^2$ *come spazio vettoriale*)
$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \big| \, x, y \in \mathbb{R}\}$ è *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ cioè è possibile definire la somma di due elementi (o "vettori") di $\mathbb{R}^2$ ed il prodotto di un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con uno "scalare" $a \in \mathbb{R}$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{S}$$

$$a(x, y) := (ax, ay) \tag{P}$$

È immediato verificare che

la somma in (S) *è commutativa e associativa; l'elemento neutro è* $0 := (0, 0)$*; per ogni vettore* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *esiste l'opposto* $-(x, y) := (-x, -y)$ *tale che* $(x, y) + \big(-(x, y)\big) = 0$*; vale la proprietà distributiva*

$$a\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)\,.$$

(b) (*Coordinate polari*)
$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}\ \exists!\ (r, t) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ tale che

$$x = r\cos t\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,t\,; \tag{A.45}$$

infatti: $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ cosicché $(x/r, y/r) \in S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x^2 + y^2 = 1\}$ e t è l'unico numero in $[0, 2\pi)$ tale che[20] $(x/r, y/r) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t)$.

Definizione A.19 *Se* $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ *e* $(r, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ *sono le sue coordinate polari,* r *prende il nome di norma di* z*, e si denota* $r := \|z\|$*, e* t *prende il nome di argomento principale di* z *e si denota con* $t = \mathrm{Arg}\,z$*. Se* $z = 0$*,* $\|z\| = 0$*.*

(c) (*Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy–Schwarz*)
Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ si definisce il loro *prodotto scalare* come

$$z_1 \cdot z_2 := x_1x_2 + y_1y_2\,. \tag{A.46}$$

È immediato verificare che

il prodotto scalare è commutativo ($z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$) *ed è lineare in ogni componente*

$$(a_1z_1 + a_2z_2) \cdot z_3 = a_1(z_1 \cdot z_3) + a_2(z_2 \cdot z_3)\,, \qquad (\forall z_i \in \mathbb{R}^2\,, a_i \in \mathbb{R})\,,$$

(ed analogamente per la seconda componente).

[20] Se $(x, y) \in S^1$, allora $x = \cos t$ e $y = \mathrm{sen}\,t$ con $t = \mathrm{Arccos}\,x$ se $y \geq 0$, $t = 2\pi - \mathrm{Arccos}\,x$ se $y < 0$, dove $x \mapsto \mathrm{Arccos}\,x$ è il ramo principale dell'arcocoseno, ossia, l'inversa della funzione $t \in [0, \pi] \mapsto \cos t$.

Osservazione A.20 (i) $z \cdot z = \|z\|^2$ per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Il prodotto scalare ha una semplice interpretazione geometrica. Siano $z_i := (x_i, y_i) \neq 0$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ non nulli, e siano (r_i, t_i) le coordinate polari di z_i. Dalle formule di addizione per il coseno otteniamo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos t_1, \operatorname{sen} t_1) \cdot r_2(\cos t_2, \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2(\cos t_1 \cos t_2 + \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 \cos(t_1 - t_2)\,. \end{aligned} \tag{A.47}$$

Da tale relazione segue la seguente **disuguaglianza di Cauchy–Schwarz**:

$$|z_1 \cdot z_2| \leq \|z_1\|\, \|z_2\|\,, \qquad \forall\ z_i \in \mathbb{R}^2\,. \tag{A.48}$$

(Si noti che se uno dei vettori z_i è nullo tale disuguaglianza è ovviamente verificata col segno $=$).

(iii) Vista la grande importanza della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, ne diamo una seconda dimostrazione algebrica (ossia che non fa uso delle funzioni trigonometriche). Riscriviamo la (A.48) ponendo $z_i = (x_i, y_i)$:

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,. \tag{A.49}$$

Dividendo per $r_1 r_2$ i termini nella (A.49) ed usando (A.46), si ha che (A.49) è equivalente a

$$|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| \leq 1 \tag{A.50}$$

dove $\bar{x}_i := x_i / r_i$ e $\bar{y}_i := y_i / r_i$, cosicché $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S^1$. Si osservi che,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}\,, \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}, \tag{A.51}$$

poiché tale relazione è equivalente alla relazione $(a - b)^2 \geq 0$. Dunque,

$$\begin{aligned} |(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| &\leq |\bar{x}_1||\bar{x}_2| + |\bar{y}_1||\bar{y}_2| \leq \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2} + \frac{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2}{2} \\ &= \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2}{2} = 1\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(d) (*Disuguaglianza triangolare*)
Per ogni $z_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ *si ha*

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|\,. \tag{A.52}$$

Dimostrazione Elevando al quadrato e "cancellando termini uguali" si vede che la relazione (A.52) è equivalente a

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,,$$

che è implicata immediatamente dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (A.49). $\blacksquare$

(e) (*Norma e distanza*)
Dalla definizione di norma e dal punto (d) segue subito che la norma verifica le seguenti proprietà ("assiomi della norma"):

(n_1) $\|z\| \geq 0$, $\forall\, z \in \mathbb{R}^2$ e $\|z\| = 0$ se e solo se $z = 0$

(n_2) $\|az\| = |a|\|z\|$, $\forall z \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$

(n_3) $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$, $\forall\, z_i \in \mathbb{R}^2$

Definizione A.21 *Se z_1 e z_2 sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ si definisce la* **distanza** *(o "distanza euclidea") di z_1 da z_2 il numero non negativo*

$$d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\| \,. \tag{A.53}$$

Dalle proprietà della norma (i)÷(iii) segue immediatamente che la distanza verifica le seguenti proprietà ("assiomi della distanza"):

(d_1) $d(z_1, z_2) \geq 0$, $\forall\, z_i \in \mathbb{R}^2$ e $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$

(d_2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, $\forall\, z_i \in \mathbb{R}^2$

(d_3) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, $\forall\, z_i \in \mathbb{R}^2$.

(f) (*Il campo complesso*)

Definizione A.22 *Il campo complesso $\mathbb{C}$ è, per definizione, $\mathbb{R}^2$ equipaggiato con due operazioni binarie, dette "somma e prodotto complesso", definite come segue:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{SC}$$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \tag{PC}$$

Osservazione A.23 (i) Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma (S) di $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale (vedi (a)), il "prodotto complesso" $*$ è assai diverso sia dal prodotto in (P) in (a), che dal prodotto scalare (A.46): esso infatti è una operazione binaria da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: ad una coppia di vettori z_1 e z_2 in $\mathbb{R}^2$ associa un terzo vettore z in $\mathbb{R}^2$.

(ii) La somma in (SC) è (come già osservato in (a)) commutativa e associativa; l'elemento neutro è il vettore (o "numero complesso") $0 := (0, 0)$; l'opposto di $z = (x, y)$ è $-z := (-x, -y)$.

Proposizione A.24 (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*

(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è $1 := (1, 0)$.*

(iii) *Se $z = (x, y) \neq 0$ il reciproco di z, denotato z^{-1} o $1/z$ è dato da*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) .$$

(iv) *Vale la proprietà distributiva:*

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 \,, \qquad \forall z_i \in \mathbb{R}^2 \,. \tag{A.54}$$

Dimostrazione (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3)\Big) = \Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2)\Big) * (x_3, y_3)\,, \tag{A.55}$$

o anche, in vista della commutatività di $*$,

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3)\Big) = (x_3, y_3) * \Big((x_2, y_2) * (x_1, y_1)\Big)\,. \tag{A.56}$$

D'altra parte, dalla definizione di * si ha che

$$\begin{aligned}\Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2)\Big) * (x_3, y_3) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) * (x_3, y_3)\\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3\,,\, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3),\end{aligned}$$

che è simmetrica negli indici 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (A.56) (e quindi (A.55)) è verificata.

(ii), (iii) e (iv) sono semplici verifiche dirette che seguono immediatamente dalla definizione di $*$. ∎

Osservazione A.25 (i) Un campo $(X, +, \cdot)$ è un insieme X dotato di due operazioni binarie "+" e "·" tali che $(X, +)$ è un gruppo commutativo[21]; $(X\backslash\{0\}, \cdot)$ (dove 0 è l'elemento neutro di $+$) è un gruppo commutativo[22]; vale la proprietà distributiva.

Esempi di campi sono $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(ii) $(0, 1)^2 := (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$. Il numero complesso $(0, 1)$ prende il nome di *unità immaginaria*. L'esistenza di tale elemento è alla base della definizione di campo complesso.

(g) ($\mathbb{R}$ *come sottoinsieme di* $\mathbb{C}$)
Sia

$$j : x \in \mathbb{R} \to j(x) := (x, 0) \in \mathbb{C}\,. \tag{A.57}$$

La funzione j, come è immediato verificare, è un isomorfismo di $\mathbb{R}$ su $j(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$, cioè j è iniettiva e conserva la somma e il prodotto con i rispettivi elementi neutri:

$$j(x + y) = j(x) + j(y)\,,\ j(xy) = j(x) * j(y)\,,\ j(0) = 0 := (0, 0)\,,\ j(1) = 1 := (1, 0)\,. \tag{A.58}$$

Tale isomorfismo permette di *identificare* $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$ identificando $x \in \mathbb{R}$ con $j(x) \in \mathbb{C}$. Tele identificazione è consistente con le notazioni $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ per le unità additive e moltiplicative di $\mathbb{C}$.

Possiamo, ora, introdurre la **notazione classica**. Innanzitutto il prodotto $z_1 * z_2$ verrà denotato (analogamente a quanto si fa in $\mathbb{R}$) semplicemente con z_1z_2:

$$z_1z_2 := z_1 * z_2\,, \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ ; \tag{A.59}$$

analogamente le *potenze* verranno denotate z^n:

$$z^n := \underbrace{z * \cdots * z}_{n\ \text{volte}}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\ ; \tag{A.60}$$

[21] Ossia, per ogni $x, y, z \in X$ vale: $x + y = y + x$; $x + (y + z) = (x + y) + z$; $\exists\, 0 \in X$ tale che $x + 0 = 0 + x = x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $-x \in X$ tale che $x + (-x) = 0$.

[22] Ossia, per ogni $x, y, z \in X$ vale: $x \cdot y = y \cdot x$; $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; $\exists\, 1 \in X$ tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $x^{-1} \in X$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$.

e l'unità immaginaria $(0,1)$ verrà denotata con $i := (0,1)$:

$$0 := (0,0)\,, \qquad 1 := (1,0)\,, \qquad i := (0,1)\,. \tag{A.61}$$

Dunque, tramite l'identificazione di $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$, scriveremo ogni numero complesso $z = (x,y)$ come

$$z = x + iy =: j(x) + (0,1) * j(y) = (x,y)\,. \tag{A.62}$$

(h) (*Complesso coniugato e modulo*)

Definizione A.26 *Se $z = x + iy = (x,y) \in \mathbb{C}$, denotiamo con $\bar{z} \in \mathbb{C}$ il suo complesso coniugato definito come*

$$\bar{z} := x - iy = (x,-y)\ ; \tag{A.63}$$

il modulo di z è per definizione il numero non negativo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{A.64}$$

che coincide, dunque, con la norma $\|z\|$ definita nella Definizione A.19.

In vista dell'identificazione fatta, abbiamo[23]

$$z\bar{z} = |z|^2\,. \tag{A.65}$$

Se $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$,

$$\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_i)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1z_2}\,, \tag{A.66}$$

e, da (A.65) e (A.66),

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = |z_1|\ |z_2|\,. \tag{A.67}$$

Dunque *il prodotto complesso conserva sia il complesso coniugato che il modulo.*

Definizione A.27 *Dato $z = x + iy$ chiameremo x la* **parte reale** *di z e y* **la parte immaginaria** *di z e scriveremo:*

$$x := \operatorname{Re}(x + iy)\,, \qquad y = \operatorname{Im}(x + iy)\,. \tag{A.68}$$

Dalla definizione di complesso coniugato seguono immediatamente le relazioni

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,. \tag{A.69}$$

(i) (*Numeri complessi e coordinate polari*)
Usando le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$x + iy := (x,y) = r(\cos t + i \operatorname{sen} t) := r(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

[23] Nella notazione introdotta all'inizio, avremmo $z * \bar{z} = (x,y) * (x,-y) = (x^2 + y^2, 0)$.

dove r è il modulo di z e $t :=$ Arg z è *l'argomento principale di* z:

$$r := |z|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad t = \operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)\,. \tag{A.70}$$

Il prodotto complesso ha una forma particolarmente semplice in coordinate polari: se $z_j = x_j + iy_j = r_j(\cos t_j + i \operatorname{sen} t_j) \in \mathbb{C}$, si ha[24]

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos t_1 + i \operatorname{sen} t_1)(\cos t_2 + i \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 \Big((\cos t_1 \cos t_2 - \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2) + i(\cos t_1 \operatorname{sen} t_2 + \operatorname{sen} t_1 \cos t_2) \Big) \\ &= r_1 r_2 \Big(\cos(t_1 + t_2) + \operatorname{sen}(t_1 + t_2) \Big)\;; \end{aligned} \tag{A.71}$$

dunque

$$\begin{aligned} &|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \\ &\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2\pi k\,, \end{aligned} \tag{A.72}$$

con $k = \big[\big(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\big)/2\pi\big]$.

Infine, il complesso coniugato corrisponde a cambiare segno all'argomento di z:

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= \overline{x + iy} = \overline{r\cos t + ir \operatorname{sen} t} = r\cos t - ir \operatorname{sen} t \\ &= r\Big(\cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) \Big)\,. \end{aligned} \tag{A.73}$$

(j) (*Successioni e serie complesse*)
La convergenza in $\mathbb{C}$ è una semplice generalizzazione della convergenza in $\mathbb{R}$.

Definizione A.28 *Una successione di numeri complessi* $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ *converge a* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$*, e scriveremo*

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \qquad (\text{oppure} \quad z_n \to z_0), \tag{A.74}$$

se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \quad |z_n - z_0| < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq N\,. \tag{A.75}$$

Osservazione A.29 Poiché

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \geq \max\{|x_n - x_0|\,,\ |y_n - y_0|\}$$

si ha che $z_n \to z_0$ implica che le due successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergono rispettivamente a x_0 e y_0; viceversa se $x_n \to x_0$ e $y_0 \to y_0$, dai noti teoremi sui limiti di successioni in $\mathbb{R}$, segue che la successione $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$, cioè $z_n \to z_0$. Dunque *dire che* $z_n \to z_0$ *è equivalente a dire che* $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ e $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$.

Esempio 1. Consideriamo la successione $z_n = a^n$ con $a \in \mathbb{C}$. Se $|a| < 1$ e $x_n + iy_n := z_n = a^n$, allora

$$\max\{|x_n|\,,\ |y_n|\} \leq |a^n| = |a|^n \to 0\,,$$

[24] Non si confonda il prodotto complesso $z_1 z_2 = z_1 * z_2$ con il prodotto scalare $z_1 \cdot z_2$ in (A.46).

dunque, in tal caso $\lim a^n = 0$. Se $a = 1$, $a^n = 1$. Se $|a| > 1$ allora $\lim |a^n| = \lim |a|^n = \infty$ e quindi a^n non converge. Anche nel caso in cui $a \in S^1 \backslash \{1\}$ si può dimostrare che z_n non converge.

Analogamente si trattano le **serie complesse**: dire che la serie $\sum z_k$ converge equivale a dire che la successione

$$\sum_{k=1}^{n} z_k$$

converge e quindi, per quanto visto prima, equivale a dire che le due serie reali $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergono, dove $x_k + iy_k = z_k$. In particolare, diremo che una serie $\sum z_k$ *converge assolutamente* se converge la serie a termini positivi $\sum |z_k|$, in qual caso converge la serie[25] $\sum z_k$. Come nel caso reale il simbolo $\sum z_k$ ha una certa ambiguità poiché denota sia la successione $\{\sum_{k=1}^{n} z_k\}$ sia, qualora la successione sia convergente, il suo limite. Infine, nel caso di assoluta convergenza (come nel caso reale), si ha

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \,. \tag{A.76}$$

Esempio 2 (La serie geometrica). Sia

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} a^k \,. \tag{A.77}$$

Come nel caso reale, otteniamo

$$(1-a)w_n = w_n - aw_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$$

e dunque, se $a \neq 1$, si ha

$$w_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \tag{A.78}$$

e, in vista dell'Esempio 1, se $|a| < 1$, otteniamo la formula nota nel caso reale della serie geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}\,, \qquad (a \in \mathbb{C}\,,\ |a| < 1),. \tag{A.79}$$

(k) (*La serie esponenziale in* $\mathbb{C}$)

Definizione A.30 *La funzione di variabile complessa*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C} \tag{A.80}$$

prende il nome di **funzione esponenziale**[26].

[25] Infatti, sia $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ che $\sum_{k=1}^{n} |y_k|$ sono maggiorate da $\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ e dunque se $\sum z_k$ converge assolutamente, convergono assolutamente anche le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ e quindi le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergeranno a due numeri reali x_0 e y_0 cosicché $\sum z_k = x_0 + iy_0$.

[26] Questa è, forse, la funzione più "importante" della analisi matematica.

La serie in (B.18) converge assolutamente e

$$|\exp z| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} \,. \tag{A.81}$$

Osserviamo che se $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned}
\exp(it) &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos t + i \operatorname{sen} t \,,
\end{aligned}$$

tale formula, ossia

$$\boxed{\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t} \qquad (t \in \mathbb{R}) \,, \tag{A.82}$$

prende il nome di **formula di Eulero**.

La funzione $\exp(z)$ sui reali (ossia per $z \in \mathbb{R}$) coincide con e^z e dunque se x e y sono reali si ha che $\exp(x+y) = \exp x \exp y$. Tale relazione vale anche nel caso complesso.

Teorema A.31 ("Teorema di addizione per l'esponenziale complesso")

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp z \ \exp w \qquad \forall\ z, w \in \mathbb{C} \,.} \tag{A.83}$$

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton (che vale inalterata in $\mathbb{C}$)

$$
\begin{aligned}
\exp(z+w) &:= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(z+w)^k}{k!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^j w^{k-j}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{0\le j\le k\le n}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{w^k}{k!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!}-\varepsilon_n\Big)
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &:= \sum_{j=1}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=n-j+1}^{n}\frac{w^k}{k!} \qquad \text{(A.84)}\\
&= z\,\frac{w^n}{n!}+\frac{z^2}{2}\Big(\frac{w^n}{n!}+\frac{w^{n-1}}{(n-1)!}\Big)+\cdots+\frac{z^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k!}\,.
\end{aligned}
$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!} &= \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{w^k}{k!}\Big)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}=\exp z\exp w\,,
\end{aligned}
$$

il teorema è conseguenza dell'identità

$$
\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\,. \qquad \text{(A.85)}
$$

Per dimostrare la (A.85), osserviamo dapprima che

$$
\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(1+1)^n}{(n+1)!}=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{j!}\,\frac{1}{(n+1-j)!}\;;
$$

dunque per ogni coppia di interi non negativi la cui somma è $(n+1)$ si ha

$$
\frac{1}{j!}\frac{1}{k!}\le\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,,\qquad \forall\, j,k\in\mathbb{N}_0 \text{ tali che } k+j=n+1\,. \qquad \text{(A.86)}
$$

Ora, se $R \geq \max\{|z|, |w|\}$, dalla (A.86), osservando che $j+k=n+1$ nel termine di destra della (A.84), si ha che

$$|\varepsilon_n| \leq R^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} \frac{1}{j!}\,\frac{1}{k!} \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} 1 \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!}\, n^2\,,$$

che, per n che tende a ∞, tende a zero. ∎

Osservazione A.32 (i) In vista del Teorema 5.3, la funzione $\exp z$ estende al campo complesso la funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x$. Si pone quindi

Definizione A.33 $e^z := \exp z\,, \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}\,.$

(ii) Grazie al teorema di addizione e alla formula di Eulero si ha, per ogni $z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{A.87}$$

e dunque

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y\,, \qquad \operatorname{Im} e^z = e^x \operatorname{sen} y\ . \tag{A.88}$$

(iii) Dalla formula di Eulero e dal teorema di addizione segue immediatamente che se s e t sono reali, allora

$$\begin{aligned}
\cos(t+s) + i \operatorname{sen}(t+s) &= e^{i(t+s)}\\
&= e^{it}e^{is}\\
&= (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos s + i \operatorname{sen} s)\\
&= (\cos t \cos s - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s) + i(\operatorname{sen} t \cos s + \cos t \operatorname{sen} s)\,,
\end{aligned}$$

relazione che fornisce una nuova prova delle formule di addizione per il seno ed il coseno.

(iv) Dalla formula di Eulero (A.82) segue

$$\left(e^{it}\right)^n = (\cos t + i \operatorname{sen} t)^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt\,,$$

ossia,

$$(\cos t + i \operatorname{sen} t)^n = \cos nt + i \operatorname{sen} nt\,. \tag{A.89}$$

Tale formula prende il nome di **formula di De Moivre**.

(v) Dal punto (b) e dalla formula di Eulero (A.82) segue che

$$\forall\ z \in S^1 := \{z \in \mathbb{C} \big|\ |z| = 1\}\,, \exists!\ t \in [0, 2\pi)\ \big| \quad e^{it} = z\ . \tag{A.90}$$

Si noti che S^1 è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C}$ e che, in vista della formula di addizione, si ha

$$e^{i(t+s)} = e^{it}\, e^{is}\,, \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}\,,$$

e quindi *la mappa $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in S^1$ definisce un omeomorfismo*[27] *tra il gruppo additivo dei numeri reali e il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1.*

[27] Naturalmente, non un *iso*morfismo dato che ogni $z \in \mathbb{C}$ hanno infinite preimmagini.

(vi) Sia $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; la sua rappresentazione polare sarà $w = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Vogliamo determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{C}$ dell'equazione algebrica

$$z^n = w \ , \qquad (n \in \mathbb{Z}) \, . \tag{A.91}$$

Per $n = 1$, $z = w$. Supponiamo $n \geq 2$ e scriviamo z nella sua forma polare: $z = re^{it}$. Allora z è soluzione di (A.91) se e solo se $r^n e^{int} = \rho e^{i\theta}$. Prendendo il modulo di tale relazione troviamo $r^n = \rho$, cioè:

$$r = \rho^{1/n} > 0 \, . \tag{A.92}$$

Rimane da determinare l'argomento di z, ossia, dobbiamo risolvere

$$e^{int} = e^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad nt = \theta + 2k\pi, \ \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \Longleftrightarrow \quad t = t_k := \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \ \ (n \in \mathbb{Z}) \, .$$

Naturalmente non tutte le soluzioni re^{it_k} determinano punto *diversi* di $\mathbb{C}$; infatti, è immediato verificare che $e^{it_k} = e^{it_h}$ se e solo se[28] *h è congruo a k modulo n* e dunque vi sono esattamente n valori distinti corrispondenti a n interi k consecutivi. Quindi *tutte le soluzioni del"equazione* (A.91) *sono date, ad esempio, da*

$$z_k := \rho^{1/k} e^{it_k} \ , \qquad t_k = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n} \, , \quad \text{con} \ \ 0 \leq k \leq n-1 \, . \tag{A.93}$$

(l) (*Topologia in $\mathbb{C}$ e teorema di Weierstrass*)
Le definizioni (e molte delle dimostrazioni) date per la topologia standard in $\mathbb{R}$ si estendono immediatamente a $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}^2$) se si sostituisce agli intervalli aperti i *dischi* aperti

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z - z_0| < r\} \, , \qquad (r > 0) \, . \tag{A.94}$$

Gli *aperti* di C sono gli insiemi A tali che ogni punto $z_0 \in A$ è interno ad A, ossia, esiste un disco $B_r(z_0) \subseteq A$; i chiusi sono i complementari degli aperti. In particolare, si ha che[29]

Proposizione A.34 *Un insieme $C \subseteq \mathbb{C}$ è chiuso se e solo se comunque presa una successione $\{z_n\}$ in C convergente si ha che $\lim z_n \in C$.*

Anche la compattezza si estende in modo ovvio: un insieme $D \subseteq \mathbb{C}$ si dice **compatto** se per ogni successione $\{z_j\}$ in D esiste una sottosuccessione $\{z_{j_k}\}$ con limite in D. Naturalmente, vale il Teorema di Bolzano–Weierstrass:

Teorema A.35 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{C}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

A titolo esemplificativo dimostriamo che se K è chiuso e limitato, allora K è compatto: sia $\{z_j\}$ una successione in K e sia $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$. Poiché K è limitato esistono $a < b$ e $c < d$ tali che $K \subseteq [a, b] \times [c, d]$ (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$). Quindi $a \leq x_j \leq b$ e $c \leq y_j \leq d$. Dunque, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}$ (Osservazione 6.5–(i)), esiste $x_{j_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$ e, analogamente, esiste $y_{j_{n_k}} \to y_0 \in \mathbb{R}$. Allora $z_{j_{n_k}} \to z_0 := x_0 + iy_0$. Poiché K è chiuso, per la Proposizione A.34, $z_0 \in K$. ∎

Anche la continuità si estende in modo ovvio o tramite definizione "con ε e δ" o tramite le successioni (tenendo a mente che grazie al teorema ponte le due definizioni sono

[28] Per definizione, due interi h, k sono congrui modulo n, in formule, $h \equiv k \pmod n$, se e solo se $(h-k)/n \in \mathbb{Z}$.
[29] Vedi Proposizione 6.24.

equivalenti). Definiamo, dunque, $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ [o $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$] continua se comunque preso $z_0 \in A$ e una successione $\{z_j\}$ in A convergente a z_0 si ha che $f(z_j) \to f(z_0)$. Ad esempio, i polinomi (a coefficienti in $\mathbb{C}$) sono funzioni continue da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$: se $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $n \geq 1$ (per $n = 0$ l'affermazione è banalmente vera), allora[30]

$$\begin{aligned} |P(z) - P(z_0)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|z^k - z_0^k| \\ &= |z - z_0| \sum_{k=1}^{n} |a_k| \big| z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z_0^{k-2} z + z_0^{k-1} \big| , \end{aligned}$$

da cui la continuità segue immediatamente.

Un teorema fondamentale che si generalizza immediatamente è il Teorema di Weierstrass:

Teorema A.36 (Weierstrass) *Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ compatto e $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume massimo e minimo su K.*

Dimostrazione Basta dimostrare il caso del massimo. Sia $M = \sup\{f(z) \big| z \in K\}$; dalla definizione di estremo superiore segue l'esistenza di una successione $\{z_k\}$ in K tale che $f(z_k) \to M$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass esiste $\{z_{k_j}\}$ in K tale che $z_{k_j} \to z_0 \in K$ e per continuità $f(z_{j_k}) \to f(z_0) = M$. ∎

Esercizi

Esercizio A.2* Dimostrare che dato $a \in S^1$, allora a^n converge se e solo se $a = 1$.

Esercizio A.3 Dimostrare la Proposizione A.34.

Esercizio A.4 Dimostrare che se $K \subseteq \mathbb{C}$ è compatto, allora K è chiuso e limitato.

6.2 Il Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema A.37 *Ogni polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ ha una radice in $\mathbb{C}$.*

In altri termini, se $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

Dimostrazione Chiaramente (sostituendo P con P/a_n) possiamo assumere che $a_n = 1$. Definiamo

$$m := \inf\{|P(z)| \big| z \in \mathbb{C}\} \in [0, +\infty) , \qquad r_0 := \max\big\{1, 2(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|), \sqrt[n]{4m}\big\} . \quad \text{(A.95)}$$

[30] Si ricordi il Corollario 1.35 che vale (con la stessa dimostrazione) anche in $\mathbb{C}$.

Allora, se $|z| \geq r_0$, si ha che

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|z|}\right) \\ &\geq \frac{|z|^n}{2} \geq 2m\,. \end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza segue che $\inf\limits_{|z|\geq r_0} |P(z)| \geq 2m$ e dunque

$$\inf_{|z|\leq r_0} |P(z)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = m\,. \tag{A.96}$$

Per il Teorema di Weierstrass, l'estremo inferiore sul compatto $\{z \big| \, |z| \leq r_0\}$ della funzione continua $|P(z)|$ è un minimo, ossia

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \big| \, |z_0| \leq r_0\,, \quad \text{e} \quad |P(z_0)| \leq |P(z)| \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{A.97}$$

Dimostriamo che $P(z_0) = 0$. Supponiamo, per assurdo, che $P(z_0) \neq 0$. Definiamo il polinomio di grado n

$$Q(z) := \frac{P(z_0 + z)}{P(z_0)}\,. \tag{A.98}$$

Si noti che

$$Q(0) = 1\ ; \quad |Q(z)| \geq 1,\ \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{A.99}$$

e che esiste $1 \leq k \leq n$ tale che

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n\,, \qquad b_k \neq 0\,, \quad b_n = \frac{1}{P(z_0)}\,. \tag{A.100}$$

Se definiamo $w := -|b_k|/b_k$, allora $|w| = 1$ ed esiste un unico $t_* \in [0, 2\pi)$ tale che[31] $e^{it_*} = w$. Quindi se $t_0 := t_*/k$ si ha che

$$e^{ikt_0} = e^{it_*} = w = -\frac{|b_k|}{b_k}\,, \tag{A.101}$$

il che implica

$$b_k e^{ikt_0} = -|b_k| \qquad \text{e} \qquad 1 + b_k r^k e^{ikt_0} = 1 - |b_k| r^k \in (0,1)\,, \qquad \forall\ 0 < r < |b_k|^{-1/k}\,. \tag{A.102}$$

Quindi, nel caso $k = n$ si ha $|Q(re^{it_0})| = 1 - |b_k| r^k \in (0,1)$ per ogni $0 < r < |b_k|^{-1/k}$, che contraddice (A.99). Se $k < n$, poniamo

$$r_1 := \min\left\{1\,, \frac{|b_k|}{2(b_{k+1} + \cdots + |b_n|)}, \ |b_k|^{-1/k}\right\}, \tag{A.103}$$

[31] Cfr. Osservazione A.32–(iv).

allora, per ogni $0 < r < r_1$ si ha

$$\begin{aligned}
|Q(re^{it_0})| &\overset{(A.100)}{=} \left|1 + b_k r^k e^{ikt_0} + \cdots + b_n r^n e^{int_0}\right| \\
&\overset{(A.102)}{=} \left|1 - |b_k| r^k + \cdots + b_n r^n e^{int_0}\right| \\
&\overset{(A.102)}{\leq} \big(1 - |b_k| r^k\big) + |b_{k+1}| r^{k+1} + \cdots + |b_n| r^n \\
&= 1 - r^k \big(|b_k| - |b_{k+1}| r - \cdots - |b_n| r^{n-k}\big) \\
&\leq 1 - r^k \Big(|b_k| - r\big(|b_{k+1}| + \cdots + |b_n|\big)\Big) \\
&\overset{(A.103)}{\leq} 1 - r^k \frac{|b_k|}{2} < 1\,,
\end{aligned}$$

il che contraddice nuovamente (A.99). ∎

Osservazione A.38 (i) *Se $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ è un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ e z_0 è una sua radice (ossia, $a_n \neq 0$ e $P(z_0) = 0$), allora P è divisibile per $(z - z_0)$*, ossia, esiste un polinomio di grado $n-1$, $Q(z) = b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0$, tale che

$$b_{n-1} = a_n\,, \qquad P(z) = (z - z_0)\, Q(z)\,. \tag{A.104}$$

Dimostrazione Sia $P_0(z) := P(z_0 + z)$. Allora $P_0(0) = 0$ e quindi, per opportuni $a'_j \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= a_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a'_1 z \\
&= z\,(a_n z^{n-1} + a'_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a'_1) \\
&=: z\,(b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \cdots + b_0) \\
&=: z\, Q_0(z)
\end{aligned}$$

con $Q_0(z) = a_n z^{n-1} + \cdots$ polinomio di grado $n-1$. La tesi segue con $Q(z) := Q_0(z - z_0)$. ∎

(ii) Dal Teorema fondamentale dell'algebra e dall'osservazione precedente (iterata n volte) segue che se $P(z) = a_n z^n + \cdots$ è un polinomio complesso di grado n ($a_n \neq 0$), allora esistono n numeri complessi (non necessariamente distinti) z_1, ..., z_n, tali che

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)\,. \tag{A.105}$$