Lezione 1/04/19

(conseguenze thm Cauchy)

def

Date $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ curva C^1 a tratti chiusa $\left(\gamma = z(t) \quad z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad z(a) = z(b) \right)$

$z_0 \notin \gamma$ (non sia nell'immagine della curva)

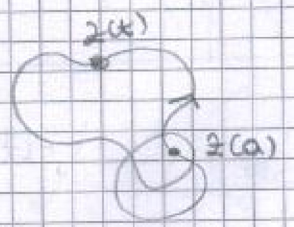
l'indice di z_0 rispetto a γ: $n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$

non ha singolarità perché $z_0 \notin \gamma$

↑ la primitiva è un log quando si può definire

Proposizione

$n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$



dim

sia $h(t) := \int_a^t \frac{z'(s)}{z(s) - z_0} ds$

- h è $C([a,b])$ e C^1 a tratti e dove è derivabile $h' = \frac{z'}{z - z_0}$
- $h(b) = 2\pi i \, n(\gamma, z_0)$

sia $g(t) := e^{-h(t)}(z(t) - z_0)$ stesse proprietà di h

- g è $C([a,b])$ e C^1 a tratti e la derivata è $\rightarrow g' = 0$

$g' = e^{-h}\left(-h'(z(t - z_0)) + z'\right)$

$\Longrightarrow g = \text{cost su } [a,b] \rightsquigarrow g(a) = g(b)$

$0 \neq z(a) - z_0 = e^{-2\pi i n(\gamma, z_0)}(z(a) - z_0)$

$\Longleftrightarrow e^{2\pi i \, n(\gamma, z_0)} = 1 \Longleftrightarrow 2\pi i \, n(\gamma, z_0) = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow n(\gamma, z_0) = k \quad k \in \mathbb{Z}$

QED

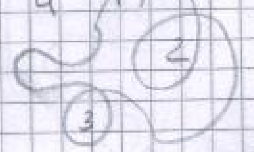
Proprietà

$\gamma^c = \gamma$ complementare

(i) $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

(ii) $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$ se cambio orientamento ho $-n$

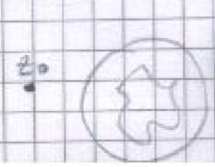
(iii) $\left(\gamma^c = \bigcup_{i=1}^{N} U_i \quad \text{4 componenti connesse di cui una illimitata} \right)$



$z_0 \mapsto n$ è costante su ogni componente connessa di γ^c

(iv) se $\gamma \subseteq \overline{D}$ disco, $z_0 \in \overline{D}^c \Longrightarrow n(\gamma, z_0) = 0$

$\left(\int f = 0 \right.$ per Cauchy $\left. \right) \rightarrow \frac{1}{z - z_0}$ è analitica su $\overline{D}$

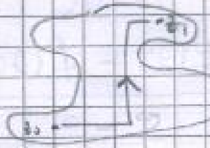


dim(iii)

basta far vedere che $z_0 \mapsto n(\gamma, z_0)$ è costante su un segmento di una componente connessa di γ^c

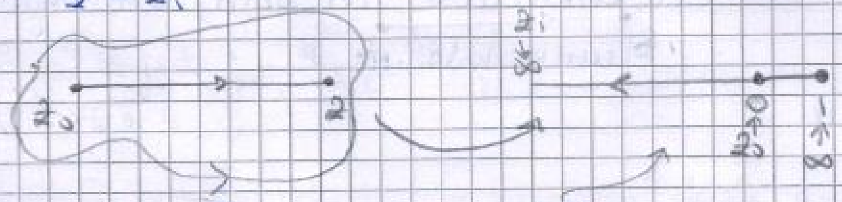
⇒ sia U una componente connessa di γ^c e siano z_0 e $z_1 \in U$

possiamo assumere che $\sigma(z_0, z_1) \subseteq U$ (per connessione di poligonali)



sia $W(z) = \frac{z - z_0}{z - z_1}$ trasformazione di Möbius

$z_0 \to 0$
$z_1 \to \infty$
$\infty \to 1$



su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ è possibile definire un ramo analitico di $\log_0 z$ (esempio $\log z > 0$)

$\Rightarrow 0 \overset{**}{=} \int_\gamma (\log_0 w)' \, dz = \,---$

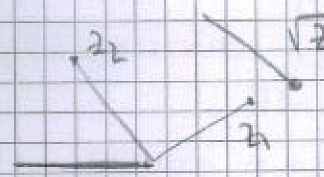
$(\log_0 w)' = \left(\log_0 \frac{z - z_0}{z - z_1} \right)' \overset{*}{=}$

NB $**$

$z \mapsto W(z)$ $U \setminus (\sigma(z_0, z_1))$ è analitica

$w \mapsto \log_0 w$ è analitica su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$

$\Longrightarrow z \in U \setminus (\sigma(z_0, z_1)) \mapsto \log_0(w(z))$ è analitica (composizioni di f analitiche)



$\sqrt{z}$ ho 2 rami della radice, del log ne ho ∞

$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ se z_1, z_2 sono nel dominio ok

se $z_1 z_2 \in (-\infty, 0]$ non è definito

localmente vera

globalmente falsa (se il ...)

⇒ stessa cosa vale per $\log_0 \frac{x}{y} = \log_0 x - \log_0 y$

→ non lo uso

$\overset{*}{=} \frac{z - z_1}{z - z_0} \frac{(z - z_1) - (z - z_0)}{(z - z_1)^2} = \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1}$

$--- = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{1}{z - z_1} (=0) \iff n(\gamma, z_0) = n(\gamma, z_1)$

cvd

Teorema [formula di Cauchy]

Sia Ω regione convessa, γ curva chiusa in Ω, f analitica su Ω

Allora $\forall z \in \Omega \setminus \gamma$ $\quad n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

dim

$F(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ è analitica in $\Omega \setminus \{z\}$ con singolarità eliminabile in z (z è costante) (z e z_0 fissati)

sia nelle hp del thm di Cauchy

$\rightsquigarrow \int_\gamma F(\zeta) d\zeta = 0$

ma $\int_\gamma F(\zeta) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{= n(\gamma, z_0)} = n(\gamma, z) f(z)$

CVD.

Esercizi

(0) $\gamma_n(t) = z_0 + e^{int} r \quad t\in[0,2\pi]$ è una curva chiusa

e^{int} calcolo $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z)$, $z\in D=\{|z-z_0|<r\}$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z_0) = \int_0^{2\pi}\frac{\gamma_n'(t)\,dt}{r e^{int}}\,\frac{1}{2\pi i} =$$

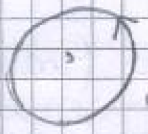
sie nella stessa componente connessa di D

$$= \cancel{r}\, in \int_0^{2\pi}\frac{e^{int}\,dt}{\cancel{r}\, e^{int}}\,\frac{1}{2\pi \cancel{i}} = n$$

(Indice è anche detto = numero degli avvolgimenti)

(1) Calcolare $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz$

es1. [A] p120



orientata positivamente

$z(t)=e^{it}$ $t\in[0,2\pi]$

$f(z):=e^z$

$$\underset{1}{n(\gamma,0)}\;\underset{1}{f(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^s}{s}\,ds$$

$$\to \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i$$

esplicitamente $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z} = i\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt$ non serve

con sviluppo di Taylor $\to$ ||

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \int_{|z|=1}\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\cancel{\int\frac{z^{k-1}}{k!}} = 0$$

(2) Calcolare $\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+1}\,dz$

es 2 [A]

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{\pi}\int\frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right) = -\pi\left(n(\gamma,-i)-n(\gamma,i)\right)$$

$$= -\pi\left(n(\gamma,0)-n(\gamma,0)\right) = 0$$

(3) $a \in \mathbb{C}$, $\rho \neq |a|$, $\rho > 0$ $\quad \displaystyle\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$ ← calcolarlo

non orientato → $|z|=\rho$

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{\rho}{i} \int_{|z|=\rho} \frac{1}{(z-a)\left(\frac{\rho^2}{z}-\bar{a}\right)} \frac{dz}{z} = \dots$$

su γ, $z\bar{z}=\rho^2$, $|dz| = |z'|\,dt = \rho\,dt = dz\,\frac{\rho}{iz}$ $\qquad iz\,dt = dz$

$z(t) = \rho e^{it}$ $\qquad \rho\,dt = \rho\frac{dz}{iz}$

$$|z-a|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) \underset{\substack{\text{su } \gamma \\ z=\rho e^{it}}}{=} (z-a)(\rho e^{-it}-\bar{a}) = (z-a)(\rho e^{-it}-\bar{a})$$

$$= (z-a)\left(\frac{\rho^2}{z}-\bar{a}\right)$$

$$\dots = \frac{\rho}{i} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)} \underset{a\neq 0}{=} \frac{i\rho}{\bar{a}} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)\left(z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}\right)} \underset{\text{per fratti semplici}}{=}$$

se $a=0$ facile

$$= \frac{i\rho}{|a|^2-\rho^2} \int \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}} = \dots\dots$$

dipende da $|a|>\rho$, $|a|<\rho$