Lezione 10/04/19

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $f_n(z)$ ANALITICA in Ω tc

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(z-a)^k + f_n(z)(z-a)^n$$

$$\text{e} \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n(\xi-z)} d\xi$$

PROPOSIZIONE

f analitica su Ω (regione connessa), $a \in \Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(a) = 0 \;\not\Longrightarrow\; f \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

$$\left(f_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \right.$$

$\left. \text{sono } f \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ tutte le } f_{1,2}^{(n)}(0) = 0 \;\forall k \text{ ma } f \not\equiv 0 \right)$

dim

Segue che $f(z) = f_n(z)(z-a)^n \quad \forall n$

stimiamo $f_n(z)$ su $C = \{|z-a|<R\}$

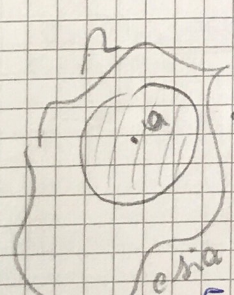
$$|f_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|\xi-a|^n|\xi-z|}$$

$$|\xi-z| \geq |\xi-a| - |a-z| = R - |a-z|$$

$$\leq \frac{M R}{R^n(R-|a-z|)}$$

$$\longrightarrow |f(z)| \leq \frac{MR}{R-|a-z|}\Big(\underbrace{\frac{|z-a|}{R}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

nel disco aperto la funzione è identicamente nulla



sia $E_1 := \{z \in \Omega \text{ tc } f^{(k)}(z) = 0 \;\forall k \in \mathbb{N}\}$

oss

$a \in E_1$; $E_1 \neq \emptyset$; E_1 è aperto

e sia $E_2 := \Omega \setminus E_1 := \{z \in \Omega \text{ tc } \exists k \in \mathbb{N},\, f^{(k)}(z) \neq 0\} =$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{z \in \Omega \text{ tc } f^{(k)}(z) \neq 0\}}_{\text{aperto}}$$

$\rightarrow E_2$ è aperto ma $\Omega = E_1 \cup E_2$ connesso $\rightarrow E_2 = \emptyset \Rightarrow E_1 = \Omega$

CVD

Conseguenze

se $f \not\equiv 0$ se $f(a) = 0$

$\exists$ prima derivata $f^{(h)}(a) \neq 0$ $\left(f^{(k)}(a) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k < h \right)$

def

a è uno ZERO DI ORDINE h significa che data f_h analitica e $f_h(a) \neq 0$ si può scrivere così:

$$f(z) = (z-a)^h f_h(z)$$

$f(z) = z^4$ $z=0$ è uno zero di ordine 4
$f(z) = z^2 - 2z + 1$ $z=1$ è uno ZERO di ordine 2

Proposizione

Gli zeri di una funzione analitica non nulla sono isolati

l'insieme degli zeri ha un pto d'acc in Ω $\quad$ $\forall$ zero $\exists$ un intorno aperto

OSS

PRINCIPIO di IDENTITÀ delle F. ANALITICHE → (1) $f(z), g(z)$ analitiche in Ω, se $f(z) = g(z)$ su un insieme che ha un punto d'accumulazione in Ω

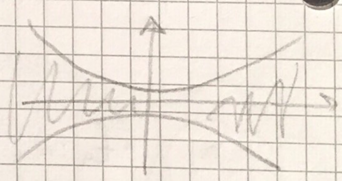
allora $f = g$ in Ω

dim

applico la prop di prima alla funzione $f(z) - g(z)$ che è identicamente nulla

(2) L'insieme degli zeri non ha un punto d'accumulazione in Ω

(3) $g = 0$ $\quad f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} \sin \frac{1}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$



$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Singolarità Isolate

Data $f(z)$ analitica su $0<|z-a|<R$

se $\lim_{z\to a} |z-a| f(z) = 0$ si può eliminare la singolarità e possiamo definire $\bar{f}(z)$ analitica su $|z-a|<\delta$

def

Se a è una singolarità isolata e $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ $\left(\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty\right)$

allora a si dice polo

esempio

(1) $f(z) = \frac{1}{z}$ ha un polo in $z=0$

(2) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ha poli in $z = n\pi$

se ho un polo

$\exists\, 0<\delta' \leq \delta$ tc $f(z) \neq 0$ $\forall\, 0<|z-a|<\delta'$

In tale disco più piccolo $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ è analitica

ma g così ha una singolarità removibile in $z=a$

$\left(\lim_{z\to a} g(z) = 0\right) \longrightarrow$ si può estendere g in a ad una f analitica $(g(a)=0)$

e siccome $g \neq 0 \longrightarrow z=a$ è uno zero di ordine h

$\longrightarrow g(z) = (z-a)^h g_h(z)$ con g_h analitica e $g_h(a) \neq 0$

allora $f(z) = \frac{1}{(z-a)^h g_h(z)} = \frac{f_h(z)}{(z-a)^h}$ con $f_h(z)$ analitica $f_h(a) \neq 0$

in un intorno di a

Se $f(z)$ ha un polo, $\exists\, h$ tc $f_h(z)$ è analitica, $f_h(a) \neq 0$

con $f(z) = \frac{f_h(z)}{(z-a)^h}$ in un intorno di a

e h si dice ordine del polo

esempio

(1) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ $z=0$ è polo di ordine 3

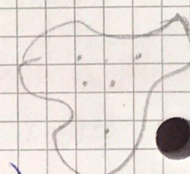
$= \dfrac{z\,\varphi(z)}{z^4} = \dfrac{\varphi(z)}{z^3}$ con $\varphi(0) \neq 0$, φ analitica

(2) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^{2019}}$ $0 = z$ è un polo di ordine 2017

def

Sia $f(z)$ analitica in Ω eccetto (al più) un insieme di punti isolati.

In questi punti isolati ci sono dei poli



Una funzione del genere si dice MEROMORFA

(olomorfa $\Rightarrow$ meromorfa, meromorfa $\not\Rightarrow$ olomorfa)

L'insieme delle funzioni meromorfe è un anello, gruppo rispetto somma e prodotto.

Esercizi (POLI)

(1) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$ $z=0$ è polo di ordine 1

$= \dfrac{1}{z} f_1(z)$ $f_1(0) \neq 0$ $f_1(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$

e $f_1(0) = \lim_{z \to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1$

(2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ $z=0$ è un polo di ordine 2

$= \dfrac{1}{z^2} f_2(z)$ con $f_2(0) \neq 0$ $f_2(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

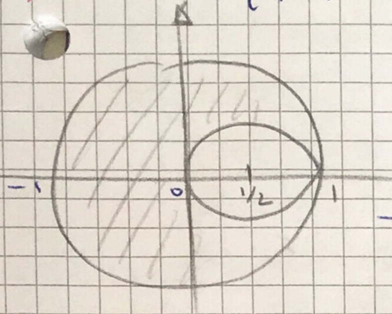
e $f_2(0) = 1$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $z = \pm i$ sono 2 poli di ordine 1

$= \dfrac{1}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{1}{z-i} f_3(z)$ $f_3(z) = \dfrac{1}{z+i}$ e $f_3(i) = \dfrac{1}{2i}$

Esercizi [Mappe conformi]

(1) $A = \{|z|<1\} \cap \{|z-\frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\} \longrightarrow \{\operatorname{Im} z > 0\}$

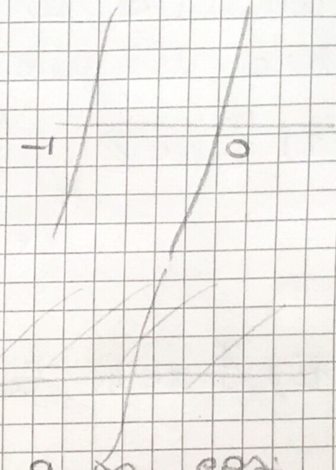


$1 \longmapsto \infty$

$0 \longmapsto 0$

$-1 \longmapsto 1$

così ho la striscia $\xrightarrow{f}$

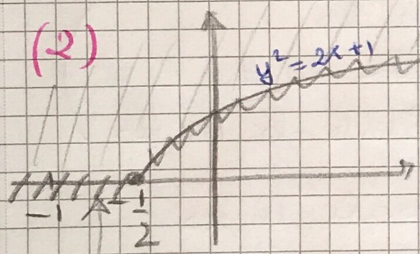


rendo la striscia $\xrightarrow{\text{dilatazione + log}}$

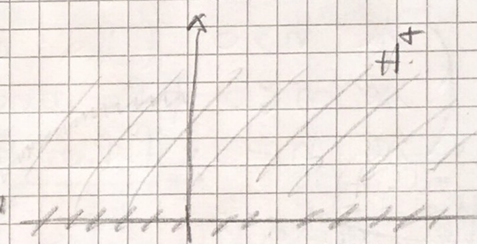
il problema sta nello spigolo $1 \to$ lo mando a ∞ così me lo tolgo (H^+ non ha spigoli)

se non lo mandassi a ∞, l'angolo verrebbe conservato

(2)



$\xrightarrow{F(z)}$



parametrizzo $z(t) = \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right) = \frac{t^2-1}{2} + it \underset{\substack{\uparrow \\ \text{completamento} \\ \text{del quadrato}}}{=} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad t>0$

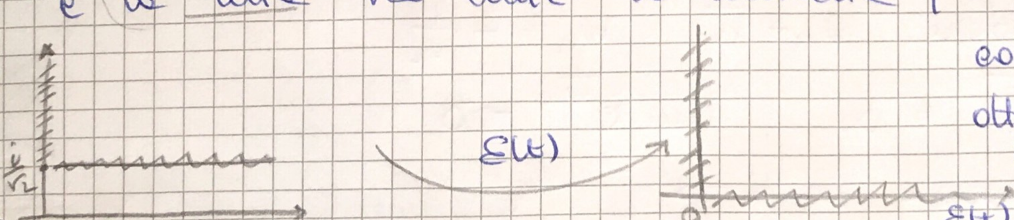
applico la radice

$z \longmapsto \sqrt{z}$ con $\sqrt{-1} = i$

$z(t) \longmapsto w(t) := \sqrt{z(t)} = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

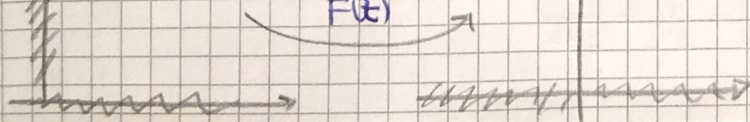
tramite queste trasformazioni il ramo di parabola ha per immagine la retta $w(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

e la retta ha come la semiretta $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$



con $E(t)$ traslo ottenendo tutto il 1° quadrante

$E(t) = w(t) - \frac{i}{\sqrt{2}} = \sqrt{z} - \frac{i}{\sqrt{2}}$



con $F(z)$ ottengo H^+

e $F(z) = \left(\sqrt{z} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$