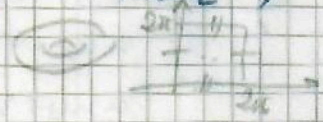
Lezione 11/03/14

Def

$f:\Omega \longmapsto \mathbb{C}$ è CONFORME se $f' \neq 0$ su Ω

def

$\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \ni \hat{\theta} = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$, $\theta\in\mathbb{R}$ $\left(\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/_{2\pi\mathbb{Z}^n}\right)$



OSS

(1) è un gruppo abeliano additivo

$\hat\theta_1 + \hat\theta_2 = \theta_1+\theta_2+2\pi\mathbb{Z}$, $\theta_1 \in \hat\theta_1$, $\theta_2 \in \hat\theta_2$

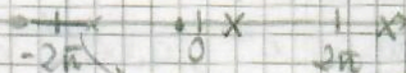
è ben posta

$\hat 0 = 2\pi\mathbb{Z}$ lo zero

$-\hat\theta = (\widehat{-\theta})$ l'opposto

(2) $\mathbb{T}$ è uno spazio metrico (topologico) (non è uno sp vettoriale)

con $d(\hat\theta_1,\hat\theta_2) := \min\limits_{\theta_i\in\hat\theta_i} |\theta_1-\theta_2|$



è questa la dist, non le altre (non sono min)

esercizio

dimostrare che $d(\hat\theta_1,\hat\theta_2)$ è una metrica

def

$S^1 := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

è una varietà, non uno sp vettoriale.

NB

Posso identificare S^1 e $\mathbb{T}^1$: $\mathbb{T} \overset{j}{\cong} S^1$

con $j(\hat\theta) = e^{i\theta}$ $\theta\in\hat\theta$

j è ben definita, essendo 2π-periodica su $\mathbb{R}$

è un omomorfismo di gruppo tra $(\mathbb{T},+)$ e $(S^1,\cdot)$

con $j(\hat 0) = 1$

$j(\hat\theta_1+\hat\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = j(\hat\theta_1)\cdot j(\hat\theta_2)$

esercizio

dimostrare che è un omomorfismo

OSS

(1) anche su S^1 c'è una metrica, la distanza euclidea (ed è equivalente alla metrica su $\mathbb{T}^1$)

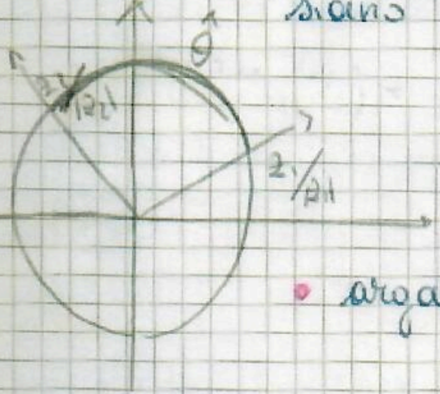
$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$

esercizio

dimostrare che $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ equivale a
$\hat{d}(z_1, z_2) := d(j^{-1}(z_1), j^{-1}(z_2))$

def

• (angoli tra elementi di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)



siano $z_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sia $\theta_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{z_1}{|z_1|} \cdot e^{i\theta_0} = \frac{z_2}{|z_2|} \quad \exists! \, \theta_0 \in [a, a+2\pi) \text{ tc } e^{i\theta_0} = \frac{z_2}{z_1} \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\hat{\theta}(z_1, z_2) := \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$$

• argomento di un elemento di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg(z) := \hat{\theta}(1, z)$$

è una funzione analitica tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{T}$

$e^{i\theta} = z_j$

PROPRIETÀ

(i)
$\hat{\theta}(z_1, z_2) = \hat{\theta}(1, z_2 z_1^{-1})$, $z_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *segue immediatamente dalla def*
(invarianza per rotazione)
$\hat{\theta}(a z_1, a z_2) = \hat{\theta}(z_1, z_2)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *
$\hat{\theta}(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$ $\forall \rho_j > 0$ *

(ii) $\hat{\theta}(z_1, z_2) = -\hat{\theta}(z_2, z_1)$

(iii) $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

(iv) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
$\arg(z_1 z_2^{-1}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ (segue da (iii)+(iv)(a))

dim

(ii) $e^{i\theta} = \frac{z_2}{z_1} \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ $\quad \theta \in \hat{\theta}(z_1, z_2) \iff e^{-i\theta} = \frac{z_1}{z_2} \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \longrightarrow -\theta \in \hat{\theta}(z_2, z_1)$

(iii) deriva da (i)+(ii)

(iv)($\supseteq$)
assumiamo $z_j \in S^1$ (così lascio da parte i moduli), ~~$\theta \in \arg(z_1 z_2) \iff e^{i\theta} = z_1 z_2$~~

ma $\theta_j \in \arg(z_j) \iff e^{i\theta_j} = z_j$ $\quad$ se prendo $j=1$ e $j=2$ e moltiplico

$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = z_1 z_2 \in \arg(z_1 z_2) \longrightarrow \theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 z_2)$

($\subseteq$) se $\theta \in \arg(z_1 z_2)$ scelgo $\theta_j \in \arg(z_j)$

$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta} \iff \theta_1 + \theta_2 - \theta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow \theta \in \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$

cvd

def

Una curva in Ω (regione di $\mathbb{C}$) è una funzione

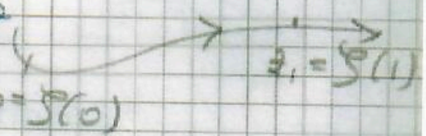
$\gamma \in C([a,b], \Omega)$, $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$

e la sua traccia o sostegno è $\gamma = \{ \gamma(t) \text{ tc } t \in [a,b] \}$

Una curva si dice REGOLARE se è C^1, iniettiva

e $|\gamma'| \neq 0$ $\left(\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \quad \gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2' = (\gamma_1', \gamma_2')\right)$

γ induce un orientamento sulla sua traccia



$\gamma'(t) :=$ vettore tangente a γ in $\gamma(t)$

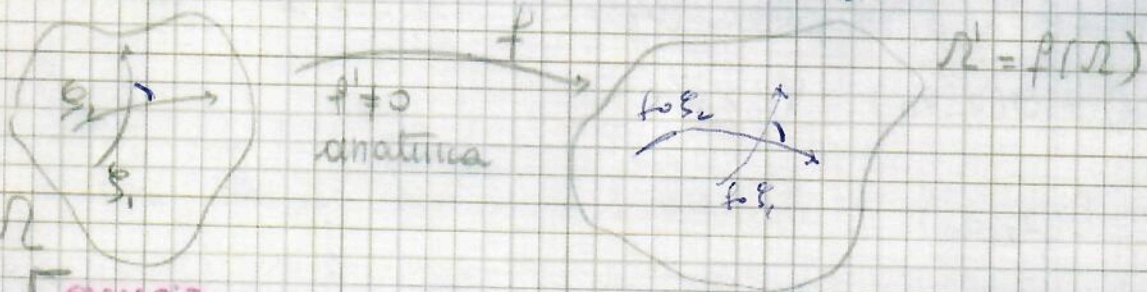
$\in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

def

Date 2 curve γ_1 e γ_2 in Ω che si intersecano

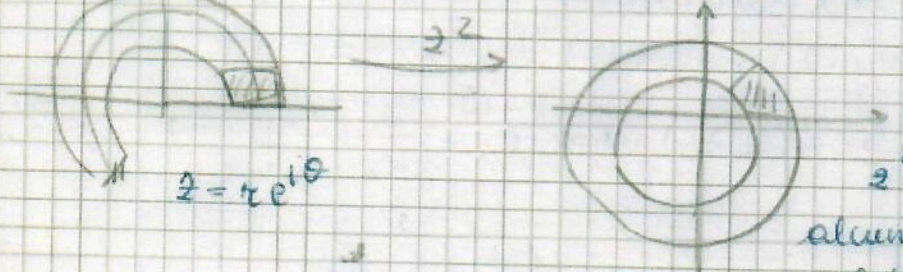
$(\exists\, t_j \text{ tc } \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0)$

L'angolo tra le 2 curve in $z_0 := \hat{\theta}(\gamma_1', \gamma_2') =: \hat{\theta}_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2)$



esempio

$f = z^2$ $f' = 2z$, f è conforme su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$



$z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

alcuni punti vengono raggiunti 2 volte

OSS

se γ è una curva regolare in Ω

$f \circ \gamma = w$ è una curva regolare in Ω

$\frac{d}{dt} f \circ \gamma = f' \circ \gamma \cdot \gamma'$ $\quad |(f \circ \gamma)'| = |f'||\gamma'| > 0.$

COROLLARIO

f conforme $\Longrightarrow f$ conserva l'angolo tra le curve

dim

$$\hat{\theta}_0 (f\circ \gamma_1, f\circ\gamma_2) = \hat{\theta}_{z_0}((f\circ\gamma_1)', (f\circ\gamma_2)')$$

$$\hat{\theta}(f'(z_0)\gamma_1', f'(z_0)\gamma_2) = \hat{\theta}(\gamma_1', \gamma_2') = \hat{\theta}_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2)$$

CVD

NB

Questo fatto significa che:

f analitica e $f' \neq 0 \overset{*128}{\Longleftrightarrow} f'$ è conforme nel senso classico che conserva gli angoli

def

Data $f = u + iv$ con $u, v \in C^1(\Omega)$ diciamo che f CONSERVA GLI ANGOLI se $\hat{\theta}_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2) = \hat{\theta}_{w_0}(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2)$

(con $w_0 = f\circ\gamma_1(t_1) = f\circ\gamma_2(t_2)$, $\gamma_i(t_i) = z_i$)

$\forall\ \gamma_1, \gamma_2$ regolari che si intersecano in z_0

non posso usare regola della catena

$$\to \frac{d}{dt} f\circ\gamma = \frac{d}{dt}(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) = \frac{d}{dt}(u(\alpha+i\beta) + iv(\alpha+i\beta))$$

$\gamma = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$

$\alpha(t), \beta(t)$

$$= (u_x\alpha' + u_y\beta', v_x\alpha' + v_y\beta')$$

$$= (u_x\alpha' + u_y\beta') + i(v_x\alpha' + v_y\beta')$$

$$= f_x\alpha' + f_y\beta'$$

β', α' scalare

f_x, f_y vettori

(u_x, v_x) (u_y, v_y)

scritti in notazione complessa

$$\Longrightarrow (f\circ\gamma)' = f_x\alpha' + f_y\beta' \quad (\gamma = \alpha + i\beta)$$

def

sia $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ $\overset{u}{\mathrm{Re} f}, \overset{v}{\mathrm{Im} f} \in C^1(\Omega)$

allora
- $\partial f = f_x - if_y$ $(= \partial_z f)$ secondo [A]
- $\bar{\partial} f = f_x + if_y$ $(= \partial_{\bar{z}} f)$

OSS

C-R $\Longleftrightarrow \bar{\partial} f = 0$

dim

$v_y - iu_y$

$-i(u_y + iv_y) = u_x + iv_x$

$$\bar{\partial} f = 0 \Leftrightarrow f_x = -if_y \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

CVD

ESERCIZIO

$$f_x \alpha' + f_y \beta' = \frac{1}{2}(\partial f \, \xi' + \bar{\partial} f \, \bar{\xi}')$$

dim

$$\frac{1}{2}\left((f_x - i f_y)(\alpha' + i\beta') + (f_x + i f_y)(\alpha' - i\beta')\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f_x\alpha' + f_y\beta' + i(f_x\beta' - f_y\alpha') + f_x\alpha' + f_y\beta' + i(\alpha' f_y - f_x\beta')\right)$$

$$= f_x\alpha' + f_y\beta'$$

CVD

Vale il viceversa (f conserva gli angoli $\Rightarrow$ f analitica e $f' \neq 0$)

* assumiamo che f conservi gli angoli

$$\hat{\theta}(f\circ\xi_1, f\circ\xi_2) = \hat{\theta}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\theta}(\xi_1', \xi_2') = \arg(\xi_2')$$

$$\hat{\theta}(\partial f \, \xi_1' + \bar{\partial} f \, \bar{\xi}_1', \partial f \, \xi_2' + \bar{\partial} f \, \bar{\xi}_2')$$

viene vettore cost

voglio dire che $b = 0$ (segue C-R)

$$\xi_1 = z_0 + (t,0), \quad \xi_1' = (1,0) = 1, \quad a = \partial f, \quad b = \bar{\partial} f$$

$$= \hat{\theta}(\underbrace{\partial f + \bar{\partial} f}_{\Delta}, \underbrace{\partial f \, \xi_2' + \bar{\partial} f \, \bar{\xi}_2'}_{\square}) = \theta\left(1, \frac{\square}{\Delta}\right) = \theta\left(\frac{\square}{\Delta}\right)$$

$$\to \arg(\xi_2') = \arg\left(\frac{a\xi_2' + b\bar{\xi}_2'}{a+b}\right) \overset{\text{per teo}}{=} \arg(a\xi_2' + b\bar{\xi}_2') - \arg(a+b)$$

cioè $\arg(a\xi_2' + b\bar{\xi}_2') - \arg(\xi_2') = \arg(a+b)$

$\Updownarrow$

$$\arg\left(a + b\frac{\bar{\xi}_2'}{\xi_2'}\right) = \arg(a+b) \equiv \text{cost}$$

$$\frac{e^{i(a+cb)}}{e^{b(c-i)}} = e^{i(a+b)} = 1$$

questa relazione è vera solo se $b = 0$ infatti

prendo una direzione qualsiasi $\xi_2 = e^{i\frac{t}{2}} \to \xi_2' = \frac{i}{2}e^{i\frac{t}{2}}$,

$$\frac{\bar{\xi}_2'}{\xi_2'} = \frac{-\frac{i}{2}e^{-it/2}}{\frac{i}{2}e^{it/2}} = -e^{-it}$$

che cosa è $\{a - b\,e^{-it}, t \in [0, 2\pi]\}$? cerchio di centro a e raggio $|b|$

$$\Longrightarrow b = 0 \iff \bar{\partial} f = 0 \iff \begin{matrix} f \text{ analitica} \\ f' \neq 0 \end{matrix}$$

affinché sia costante

devo avere il cerchio degenere

CVD