Lezione 13/03/19

MAPPE DI MÖBIUS o TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE

def

funzioni complesse della forma $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tc $ad-bc \neq 0$

$\{$mappe di Möbius$\} = \mathcal{M}$

OSS

(1) se $ad-bc = 0 \Rightarrow f \equiv cost$ (esercizio)

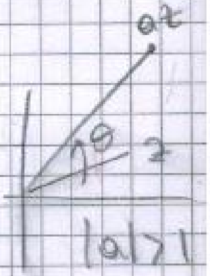
(2) se $c = 0 \Rightarrow f(z) = az+b \longrightarrow f$ è una funzione intera (retta complessa) (analitica su $\mathbb{C}$) e conforme $(f'(x) = a \neq 0)$

(3) se $c \neq 0$ $\left(f \text{ ha la forma } f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}\right)$ non è + una f intera

$\rightsquigarrow f$ ha una singolarità in $z = -\frac{d}{c}$ ed è una funzione definita su $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ed è conforme

$$f' = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

(4) CASI SPECIALI



moltiplicazione

- $b,c,d = 1 \rightsquigarrow M_a z := az$, $a \neq 0$ $\quad az = |a| e^{i\theta} z$

traslazioni

- $T_b z := z+b$
- $J_z := \dfrac{1}{z}$ $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{e^{-i\theta}}{|z|}$ se $z = |z| e^{i\theta}$

(inversione)

Lemma

Se $S \in \mathcal{M}$ allora S è composizione di queste 3 trasformazioni

dim

se $c = 0 \rightarrow S(z) = az+b = T_b M_a z$

se $c \neq 0$ assumiamo (possiamo) $c = 1 \rightarrow S(z) = \dfrac{az+b}{z+d}$

$$= \frac{az+b}{z+d} = \frac{\alpha}{z+d} + a = T_a M_\alpha J T_d z \quad , \alpha + az + ad = az+b$$

con $\alpha = b-ad$

$\sharp$

cvd

(5) $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a\lambda z+b\lambda}{c\lambda z+d\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, si può riscalare per un certo $\lambda \neq 0$

(6) $A \in GL(2,\mathbb{C})$ possiamo associare una $S_A \in \mathcal{M}$

$$S_A z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

esercizio

Siano $A, A' \in GL(2,\mathbb{C})$, dimostrare che $S_{A'} S_A = S_{A'A}$

svol.

$$S_{A'} S_A z = S_{A'} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{a'az + ba' + cb'z + db'}{c'az + c'b + d'cz + dd'}$$

$$= \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}$$

ma $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + dd' \end{pmatrix}$ ok

$\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ è un gruppo

con $S_A^{-1} = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$

(7) Compattificazione ad un punto di $\mathbb{C}$

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

con questa estensione di $\mathbb{C}$, sia $f \in \mathcal{M}$, $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$\begin{cases} \text{se } c = 0 & f(\infty) := \infty \\ \text{se } c \neq 0 & f(\infty) := \frac{a}{c}, \quad f(-\frac{d}{c}) := \infty \end{cases}$$

e f è 1-1 su $\hat{\mathbb{C}}$ (biunivoca)

$\rightarrow$ Introduciamo la seguente topologia su $\hat{\mathbb{C}}$:

Intorni di ∞ sono insiemi della forma $\{z \mid |z| > a\} \cup \{\infty\}$, $a > 0$

OSS

$\hat{\mathbb{C}}$ è compatto

dim

è uno sp. metrico $\rightarrow$ si usa la caratterizzazione di compattezza per successioni. sia $\{z_n\}$ una succ.

• se $\{z_n\}$ è limitata $\xrightarrow{B.W.}$ $\exists$ n_k e $z_0 \in \mathbb{C}$ | $z_{n_k} \longrightarrow z_0$

- se $\{z_n\}$ non è limitata $\iff \exists\, n_k$ tc $|z_{n_k}| \longrightarrow +\infty$

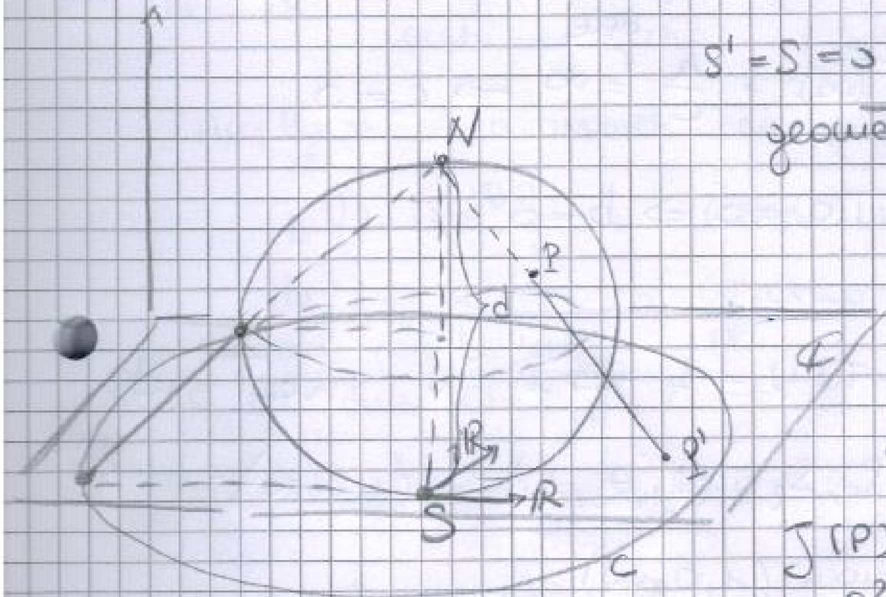
$\left((-2)^n \longrightarrow \infty \text{ ok in AC}\right)$ $\implies z_{n_k} \longrightarrow \infty$

converge a ∞ (senza + e senza moduli

esercizio

Dim che $f \in \mathcal{M}$, f induce un omeomorfismo di $\hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$\hat{\mathbb{C}}$ si chiama anche SFERA DI RIEMANN



$S' = S = 0$

geometria elementare per (A) = geometria euclidea

P' = proiezione stereografica di P

$N' = \infty$, l'equatore viene mandato nel cerchio C

$J(P) = P'$ è un omeo da $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con la loro topologia

J = proiezione stereografica

(8) Il birapporto (cross ratio)

- siano $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, cerchiamo $S \in \mathcal{M}$ tc: $z_2 \longmapsto 1$, $z_3 \longrightarrow 0$, $z_4 \longmapsto \infty$

il den deve essere fatto così: $z - z_4$ (assumo $c = 1$)

il num $z - z_3$ (per $S z_3 = 1$) con z_j distinti

$$\Rightarrow S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \, \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

- siano z_j 3 punti distinti di $\hat{\mathbb{C}}$

se $z_2 = \infty$ (lo faccio per limiti) $\quad \dfrac{z - z_3}{z - z_4} = S$

se $z_3 = \infty$ // $\quad S = \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4}$

se $z_4 = \infty$ // $\quad S = \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}$

abbiamo appena dimostrato che:

Lemma

Dati $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ $\exists !$ $S \in \mathcal{M} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$: $Sz_2 = 1$, $Sz_3 = 0$, $Sz_4 = \infty$

dim

$\exists$ appena dim

OSS

se $T \in \mathcal{M}$ che lascia fissi $(1, 0, \infty) \Rightarrow T = id$

dim

$Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $T(\infty) := \dfrac{a}{c} \overset{\text{deve}}{\neq} \infty \Rightarrow c = 0$

$\rightsquigarrow Tz = az + b$, $T(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

rinominando a e b

$\rightsquigarrow Tz = az$, $T(1) = 1 \rightarrow a = 1$ $\rightsquigarrow T = id$

cvd oss

se $\exists$ 2 mappe di $\mathcal{M}$. $S_1, S_2 : (z_2, z_3, z_4) \longrightarrow (1, 0, \infty)$

$\rightsquigarrow S_2 S_1^{-1}$ lascia invariati $(1, 0, \infty)$

$\rightsquigarrow S_2 S_1^{-1} = id \Rightarrow S_2 = S_1 \rightarrow$ la mappa è unica

cvd

def

BIRAPPORTO di z_2, z_3, z_4 punti distinti di $\hat{\mathbb{C}}$ è per definizione $S(z)$ una mappa di Möbius che mappa $(z_2, z_3, z_4) \longrightarrow (1, 0, \infty)$ e si denota con $(z, \underbrace{z_2, z_3, z_4}_{\text{distinti}})$

OSS (Lemma)

Il birapporto è invariante per trasformazioni di Möbius

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$ $\forall z_2, z_3, z_4$ distinti e $T \in \mathcal{M}$

dim

$S(z) := (z, z_2, z_3, z_4)$; $ST^{-1} : (Tz_2, Tz_3, Tz_4) \longrightarrow (1, 0, \infty)$

$ST^{-1}(Tz_1) = S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

$\qquad \| $

(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)

cvd

sia $\mathcal{C} := \{\text{rette o cerchi in } \mathbb{C}\} = \{\text{cerchi generalizzati}\}$

Teorema

$\forall S \in \mathcal{M},\ S\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}$ — S manda rette o cerchi in cerchi o rette

(non necess. rette $\to$ rette, cerchi $\to$ cerchi)

dim

Basta dimostrare il teorema per M_a, T_b, J

M_a, T_b rette $\to$ rette $\quad Ax + By = C \quad (A,B) \neq 0 \quad A,B,C \in \mathbb{R}$

cerchi $\to$ cerchi $\quad \{z_0 + re^{i\theta} \text{ t.c. } \theta \in [0, 2\pi)\}$

$Ax + By = C$ in maniera complessa $\alpha z + \overline{\alpha z} = \beta \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \beta \in \mathbb{R}$

$T_b \{z_0 + re^{i\theta}\}$ = cerchio traslato

$M_a \{ \dots \}$ = cerchio di raggio ra ok

idem per la retta ok

Resta da dim che $J : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}$

$\sigma(x^2+y^2) - 2ax - 2by + c = 0 \quad , \sigma = 0,1 \ , a,b \in \mathbb{R}$

$(a,b) \neq (0,0)$ se $\sigma = 0$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$

$\sigma = 0 \quad c \in \mathbb{R}$

$\sigma = 1 \quad a^2 + b^2 > c$

sostituisco z con $\frac{1}{z} = J(z)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \leadsto \quad x \longrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} \quad y \longrightarrow \frac{-y}{x^2+y^2}$ la trasformazione che applico

$$\sigma\left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4}\right) - 2a\frac{x}{r^2} + 2b\frac{y}{r^2} + c = 0$$

$$\boxed{\sigma - 2ax + 2by + r^2c = 0}$$

se $a = b = 0$, $\sigma = 1$, $c < 0$ $\to \sigma + r^2c = 0 \to r^2 = -\frac{1}{c}$ cerchio per l'origine

se

esercizio (S11)

~~Completare e~~ verificare che

cerchi $\to$ cerchi

rette $\to$ rette

cerchi $\to$ rette.