Lezione 13/05/19

Problema

Sia f_n una successione di funzioni analitiche su Ω, se $f_n \longmapsto f$. f è analitica su Ω? E/sotto quali condizioni?

esempio

$$f_n(z) = \frac{2}{2z^n + 1}$$

$$|2z^n| < 1 \iff |z|^n < \frac{1}{2} \iff |z| < \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < 1$$

$f_n(z) \longrightarrow 2 \quad \forall |z|<1$ converge puntualmente $\forall z$ fissato

$\star$ funzione olomorfa

Ma non converge uniformemente su $\Omega := \{|z|<1\}$ $\star$

$f_n \longmapsto f$ uniformemente su Ω
$\iff \forall \varepsilon>0, \exists N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon>0, \forall n \geq N$
$\iff \lim_{n\to+\infty} \sup |f_n - f| = 0$

$\star$ infatti $\left| 2 - \frac{2}{2z^n+1} \right| = \left| \frac{2z^{n+1}}{2z^n+1} \right|$

e $\sup_{\substack{|z|<1 \\ 2z^n+1 \neq 0}} \left| \frac{2z^{n+1}}{2z^n+1} \right| = +\infty$

Teorema [Weierstrass]

Siano f_n analitica su Ω_n e f analitica in Ω. Assumiamo che $f_n \longmapsto f$ uniformemente su ogni compatto $K \subseteq \Omega$.
Allora f è analitica è $f_n' \longmapsto f'$ unif sui compatti di Ω

($\rightarrow \forall K$ compatto in Ω $\exists N : K \subseteq \Omega_n \ \forall n \geq N$ e $\lim_{n\to+\infty} \sup |f_n - f| = 0$)

Osservazione

Basta assumere che f_n converge sui compatti di Ω

th: $\exists f$ anal su Ω : $f_n \longmapsto f$ unif sui compatti e $f_n' \longmapsto f'$ (sui compatti di Ω)

convergenza puntuale ... di ...

dim

segue dalla formula di Cauchy

1. Sia $\{|z-z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$

$$f_n(\cancel{z_0}\, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{\xi - \cancel{z_0}\, w}$$

uc

$$f(\cancel{z_0}\, w) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - \cancel{z_0}\, w} d\xi \qquad \forall w \in B_r(z_0)$$

$\Rightarrow f$ analitica su $B_r(z_0)$

CVD

Corollario [Hurwitz]

f_n analitiche e $f \neq 0$ Ω. Se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di Ω

Allora $f_n \equiv 0$ oppure $f_n \neq 0$ $\forall z \in \Omega$

dim

supponiamo $f \not\equiv 0$ e assumiamo che $\exists z_0 \in \Omega$ tc $f(z_0) = 0$

$\rightarrow \exists n \geq 1$ tc $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ con $g(z)$ analitica e $g(z_0) \neq 0$

Princ. Argomento $\xrightarrow{P.d.A}$ $n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'}{f} d\xi$

con r suff piccoli

$$\overset{\text{thm W.}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n'}{f_n} dz \overset{P.d.A}{=} 0 \quad \text{contraddiz}$$

CVD