Lezione 15/04/19

Lemma

f analitica su $\{0<|z-z_0|<r\}$, $f\not\equiv 0$
allora vale una delle seguenti alternative:

(i) $\exists\, n\in\mathbb{Z}$: $\ast\begin{cases} \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha f(z)=0 & \forall \alpha>n \\ \text{e } \lim_{z\to z_0}|z-z_0|^\alpha f(z)=\infty & \forall\alpha<n \end{cases}$ e $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

ii) $\nexists\, \alpha\in\mathbb{R}$ tc vale uno dei limiti in $\ast$

Aprile
15 - 17 (B)
29
Maggio
3 (13.30-15) (B)
6 - 8 - 10
13 - 15 - 17
20 - 22 - 24
27 - 29

Calendario

def

Nel caso (i), n si chiama ORDINE ALGEBRICO di f (È UN INTERO)

(se $n>0$ f ha un polo di ordine n in z_0
se $n\leq 0$ f ha una singolarità eliminabile in z_0
e se $n<0$ f ha uno zero di ordine $-n$ in z_0)

Nel caso (ii) f ha una singolarità essenziale in z_0

OSS 1

Se f analitica in $\{0<|z-z_0|<r\}$, $\exists$ $z_n\longmapsto z_0$, $w_n\longmapsto z_0$
tc $f(z_n)\longmapsto\alpha$, $f(w_n)\longmapsto\beta$, $\alpha,\beta\in\hat{\mathbb{C}}$ e $\alpha\neq\beta$
$\Longmapsto$ f ha una singolarità essenziale in z_0

esercizio

$e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in $z_0=0$

Sol

basta prendere $z_n=\frac{1}{n}$ $w_n=-\frac{1}{n}$
$\leadsto$ $\lim e^{\frac{1}{z_n}}=\infty$; $\lim e^{\frac{1}{w_n}}=0$
$\xrightarrow{\text{oss}}$ sing essenz in $z_0=0$.

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}$$

se f ha un polo di ordine n in z_0

$$\underbrace{\frac{B_n}{(z-z_0)^n}+\frac{B_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots+\frac{B_1}{(z-z_0)}}_{\text{parte singolare}}+\underbrace{g(z)}_{\text{parte regolare}} \quad \text{con } g \text{ analitica}$$

OSS 2

Nel caso (i) $\quad f(z)=(z-z_0)^{-n} f_n(z) \quad$ con f_n analitica e $f_n(z_0)\neq 0$.

OSS 3

L'ordine algebrico è un numero intero

dim

idea: assumo che non sto nel 2° caso $\rightarrow$ sto nel caso (i)

(a) $\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tc $\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha_0} f(z)=0 \longrightarrow \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha} f(z_0)=0 \quad \forall \alpha \geq \alpha_0$

In particolare $\exists\, m\in\mathbb{Z}$ $(m=[\alpha_0]+1)$ tale che:

$\lim_{z\to z_0} \boxed{(z-z_0)^m f(z)}=0 \longrightarrow$ $F(z)=(z-z_0)^m f(z)$ nel disco bucato questa f analitica ha una sing eliminabile in z_0 e $F(z_0)=0$

$\rightarrow \exists\, k\in\mathbb{N} : (z-z_0)^m f(z)=(z-z_0)^k g(z)$ con g anal in D

$\rightsquigarrow f(z)=(z-z_0)^{-n} f_n(z)$ con $f_n(z):=g(z)$ e $n:=m-k$

se $\alpha > n \quad |z-z_0|^{\alpha}|f| = |z-z_0|^{\alpha-n}|f_n(z)| \longrightarrow$ vale (*)

(b) $\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tc $\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha_0} f(z)=\infty$

$\rightarrow \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha} f(z)=\infty \quad \forall \alpha \leq \alpha_0$

In particolare $\exists\, m\in\mathbb{Z}$ ($m:=[\alpha_0]$ tc $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\infty$)

$\rightarrow F(z)=(z-z_0)^m f(z)$ ha un polo di ordine $k>0$ in z_0

$(z-z_0)^m f(z)=(z-z_0)^{-k} g(z)$ con g analitica in D e $g(z_0)\neq 0$

$f(z)=(z-z_0)^{-n} f_n(z) \quad n=k+m$ e $f_n:=g$ $\quad$ cvd

Nell'intorno di una sing essenziale la funzione assume tutti i valori della sfera di Riemann

Corollario

f ha una singolarità essenziale in z_0 $\Longleftrightarrow$ $\overline{E_\rho} = \overbrace{\overline{\{f(z) \mid 0<|z-z_0|<\rho\}}}^{\text{chiusura}} = \hat{\mathbb{C}}$

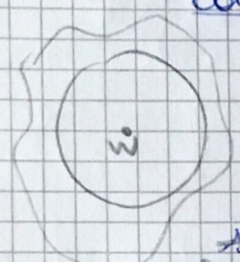
$\forall\ 0<\rho<r$

dim

$\Longleftarrow$) segue dall'osservazione 1

$\Longrightarrow$) per assurdo (o salta un num complesso o salta ∞)

caso 1



$\exists\ 0<\rho<r$, $\exists\ w\in\mathbb{C} \mid w\notin E_\rho \rightarrow \exists\ \delta>0$ tc $|f(z)-w|>\delta$ $\forall |z-z_0|<\rho$

non prende una palletta attorno a w

si ha $(f(z)-w)(z-z_0)^{-1} \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty$ $\Longrightarrow$ $f(z)-w$ non ha una sing essenz in z_0

$\rightsquigarrow$ $f(z)-w = (z-z_0)^{-n} g(z)$ con g analitica in $|z-z_0|<\rho$, $g(z_0)\neq 0$

e $f(z) = w + (z-z_0)^{-n} g(z) \longrightarrow \exists\ k\in\mathbb{N}: (z-z_0)^k f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$

$\Longrightarrow$ f non ha sing essenz in z_0 assurdo

caso 2

se assumiamo che $\infty\notin E_\rho \Longrightarrow \exists\ \rho, M : |f(z)|<M$ $\forall\ 0<|z-z_0|<\rho$

$\rightsquigarrow$ $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \longrightarrow f$ non ha sing essenz in z_0 contraddiz

cvd

def

Se f è analitica e $\neq 0$, in un intorno di ∞, ossia in $|z|>\frac{1}{r}$ $\forall r>$

definiamo ∞ come singolarità isolata di f

e diremo che ∞ è RIMOVIBILE, POLO, SING ESS

se 0 è RIM., POLO, SING ESS per la funzione $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

con g analitica, $\neq 0$ in $|z|<r$

esempio

- e^z ha una sing essenziale in ∞
- $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$

$$\begin{cases} z \neq -\frac{d}{c}, & c\neq 0 \; ; \; f(\infty) = \frac{a}{c} \\ z \in \mathbb{C} & c=0 \; ; \; f(\infty) = \infty \end{cases}$$

$c \neq 0$ f ha un polo di ordine 1 in $-\frac{d}{c}$

$$f(z) = \frac{1}{c}\frac{az+b}{\left(z-\left(-\frac{d}{c}\right)\right)} = \frac{1}{z-z_0}\, g(z) \; ; \; g(z) = \frac{1}{c}(az+b)$$

$$\text{e } g(z_0) = -\frac{1}{c^2}(ad-bc) \neq 0$$

$f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C} \rightarrow \infty$ è una sing rimovibile per f

se $c=0$ $f(z) = \underset{0\neq}{\left(\frac{a}{d}\right)} z + \frac{b}{d}$ ~~non~~ ha un polo di ordine 1 in ∞

$$\left(f\left(\frac{1}{w}\right) = \underbrace{\frac{a/d}{w}}_{\text{singolare}} + \underbrace{\frac{b}{d}}_{\text{regolare}} \right)$$

Contare zeri

Sia f analitica in un disco $D = \{|z-z_0|<R\}$, $f \not\equiv 0$.

siano $\{z_j\}_{0\leq j\leq n}$ gli zeri di f in D contati con molteplicità $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

oss

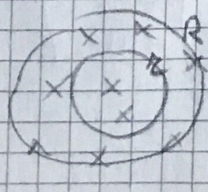
se $n=0 \rightarrow f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$

se z_1 è uno zero di ordine $+\infty > n_1 \geq 1$ finito

allora $z_1 = \cdots = z_j \quad \forall\, 1\leq j \leq n_1$ e così via

$\exists\, z_{n_1+1} \neq z_1$

se $n = +\infty \longrightarrow z_j$ si accumulano su $\partial D \Leftrightarrow \forall\, 0<r<R$



$\#\{z_j \in |z-z_0|<r\} < \infty$

CASO I $n<\infty$

ossia f ha un numero finito di zeri in D

$\Updownarrow$

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)\, f_n(z) \qquad f_n \text{ analitica in } D \text{ e } f_n(z)\neq 0 \ \forall z\in D$$

def

La DERIVATA LOGARITMICA di f in z_0 : $f(z_0)\neq 0$ è $\dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)}$

$$* \ \frac{f'}{f} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \qquad \forall z \neq z_j$$

Proposizione

f analitica in D, $f \not\equiv 0$, $\{z_j\}$ gli zeri contati con molteplicità di f in D

sia γ una curva chiusa in D t.c. $z_j \notin \gamma \ \forall j$

allora $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\, dz = \sum_j n(z_j, \gamma)$ $\longrightarrow$ somma finita

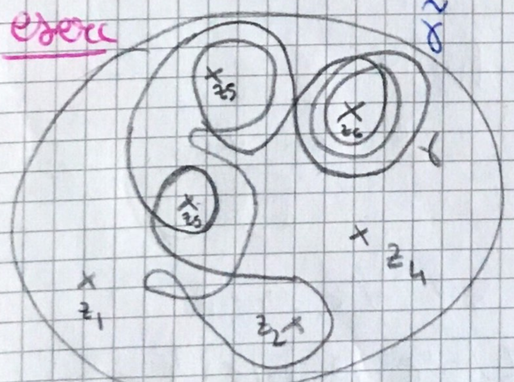
dim sopra * $\qquad \displaystyle \overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{m}} n(z_j,\gamma)$ se $z_1,\dots,z_m$ sono zeri in $\{|z-z_0|<r\}$

OSSERVAZIONE

$\exists\ 0<r<R$, $\gamma \subseteq \{|z-z_0|<r\}$

e ricorda che $n(z,\gamma)=0$ se, dato $\gamma\subseteq D$, $z\notin D$

eserc



Calcolare $\displaystyle \int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\frac{f'}{f} = 3$

svol

$n(\gamma, z_5) = 0$

$n(\gamma, z_4) = 0$

$n(\gamma, z_3) = 1$

$n(\gamma, z_2) = 1$

$n(\gamma, z_1) = 0$

$n(\gamma, z_6) = 3$

e $\displaystyle \int_{\tilde\gamma} \frac{1}{2\pi i}\frac{f'}{f} = 6$

vero!?