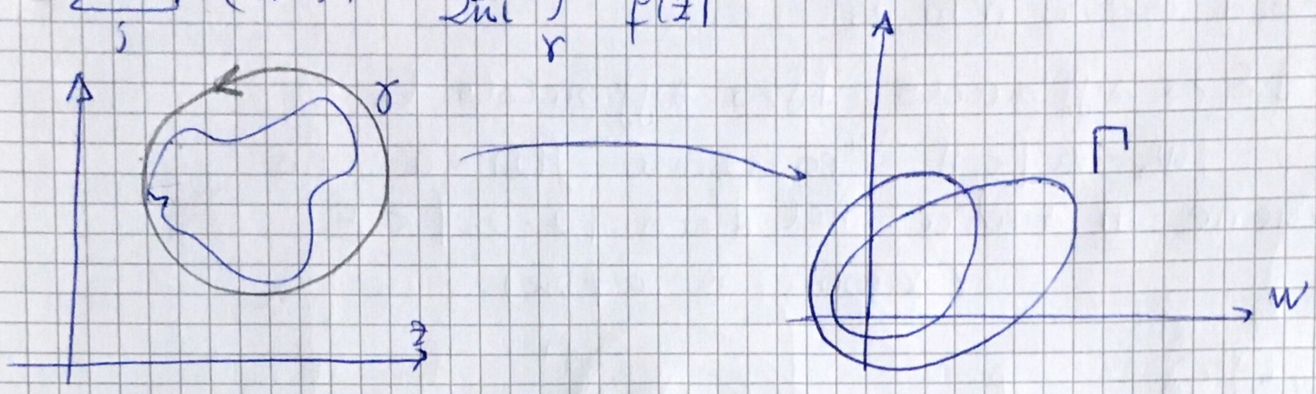
Lezione 17/10/19 (Biasco)

$$\sum_j n(\gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$



$w = f(z)$, $\Gamma = f\circ\gamma$

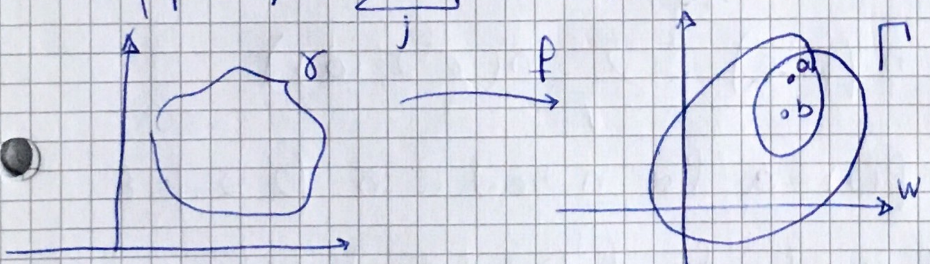
$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$$n(\Gamma, 0) = \sum_j n(\gamma, z_j)$$

se γ è una circonferenza è 0, 1 (fuori o dentro z_j)

Ora sia $f(z) = a \in \mathbb{C}$, considero $f(z) - a$ (olomorfa) e siano $z_j(a)$ soluzioni di $f(z) - a = 0$

$$\rightarrow n(\Gamma, a) = \sum_j n(\gamma, z_j(a))$$



$\big(n(\Gamma, a) = n(\Gamma, b)\big)$
a e b stanno nella stessa componente connessa

$$\Rightarrow \sum_j n(\gamma, z_j(a)) = \sum n(\gamma, z_j(b))$$

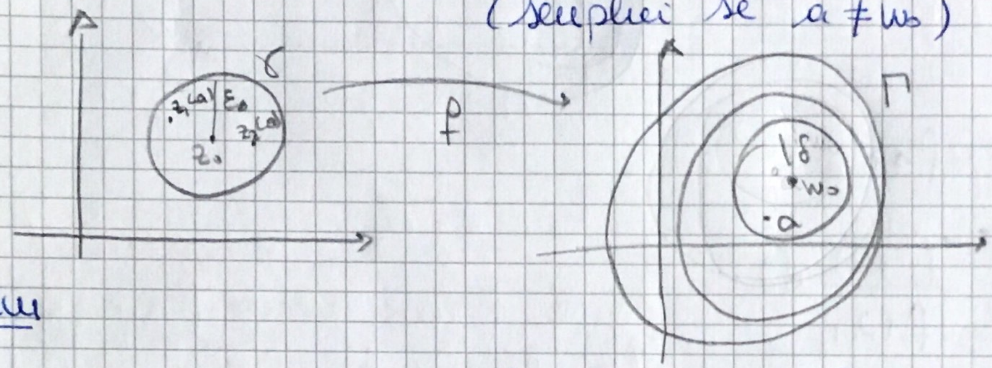
Teorema 11

f analitica in z_0, $f(z_0) = w_0$, f non costante ($\not\equiv c$), $f(z) - w_0$ ha uno zero di ordine n in z_0

Allora $\exists\, \varepsilon > 0$ suff piccolo, $\exists\, \delta > 0$ suff piccolo tc

$\forall a : |w_0 - a| < \delta$ l'equazione $f(z) = a$ ha esattamente $\underline{\underline{n}}$ radici nel disco $|z - z_0| < \varepsilon$

(semplici se $a \neq w_0$)



dim

Siccome z_0 è uno zero (isolato) di $f(z) - w_0$

$\rightarrow$ sia $\varepsilon > 0$ suff piccolo tc z_0 è l'unico zero di $f(z) - w_0$ in $|z - z_0| < \varepsilon$

se ora $\gamma = \{|z - z_0| = \varepsilon\}$ $\quad w_0 \in \Gamma^c \rightarrow$ sta in un aperto w_0

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tc $|w - w_0| = \delta$ non interseca Γ

ma
$$n = n(\Gamma, w_0) = n(\Gamma, a) \overset{\text{so}}{=} \sum_i n(\gamma, z_i(a))$$

$\forall a$ tc $|a - w_0| < \delta$, $f(z) = a$ ha $\underline{n}$ radici in $|z - z_0| < \varepsilon$

posso scegliere ε suff piccolo tc $f'(z) \neq 0 \quad \forall\, 0 < |z - z_0| < \varepsilon$

$\overset{e}{\rightarrow}$ lo zero è semplice perché ha derivata non nulla

cvd

esempio

$f(z) = z^3 \qquad z_0 = 0 \qquad w_0 = 0$

$n = 3$

se $0 < |a| < \delta$ allora $f(z) = a$ $\quad z^3 = a$ ha 3 radici e ognuna di queste radici è semplice

(ovvio per i polinomi, vero per le f olomorfe)

Corollario 1

Sia $f \not\equiv \text{cost}$, analitica $\Longrightarrow$ f è aperta $\left(f : \underset{\text{aperto}}{A} \longmapsto \underset{\text{aperto}}{f(A)}\right)$

(non vero sui reali, $f(x) = x^2$ e $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$)

dim

l'immagine di un qualsiasi disco suff piccolo, contiene un disco
$|z - z_0| < \varepsilon$ $\qquad$ $|w - w_0| < \delta$

ma è vero per thm 11

CVD

Osservazione

se $n = 1$ $\quad$ f è localmente invertibile, ogni punto in un disco ha una e una sola controimmagine.

$$\Delta = \{ |w - w_0| < \delta \} \qquad A = f^{-1}(\Delta) \cap \{ |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$f : A \longrightarrow \Delta \quad \text{è invertibile}$$

e f è un omeomorfismo

$\rightsquigarrow f'(z) \neq 0$ $\quad$ f^{-1} è analitica

dim

sia $g = f^{-1}$, $w_0 = f(z_0)$

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} =$$

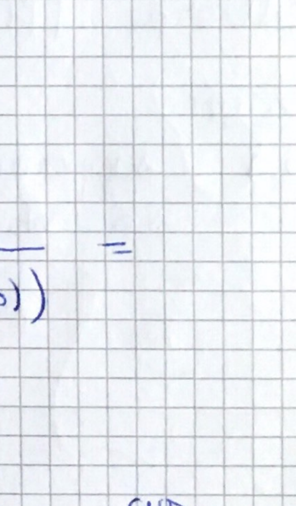
$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{w \to w_0} \frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

CVD

esempio

$z_0 = 0 = w_0$ $\quad$ $n > 1$, $f(z) = z^n g(z)$ e $g(0) \neq 0$

se $\varepsilon > 0$ è suff piccolo



$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{g(0)} \text{ analitica} \longrightarrow |\varphi(z) - 1| < 1$$

posso definire in modo univoco la radice n-esima

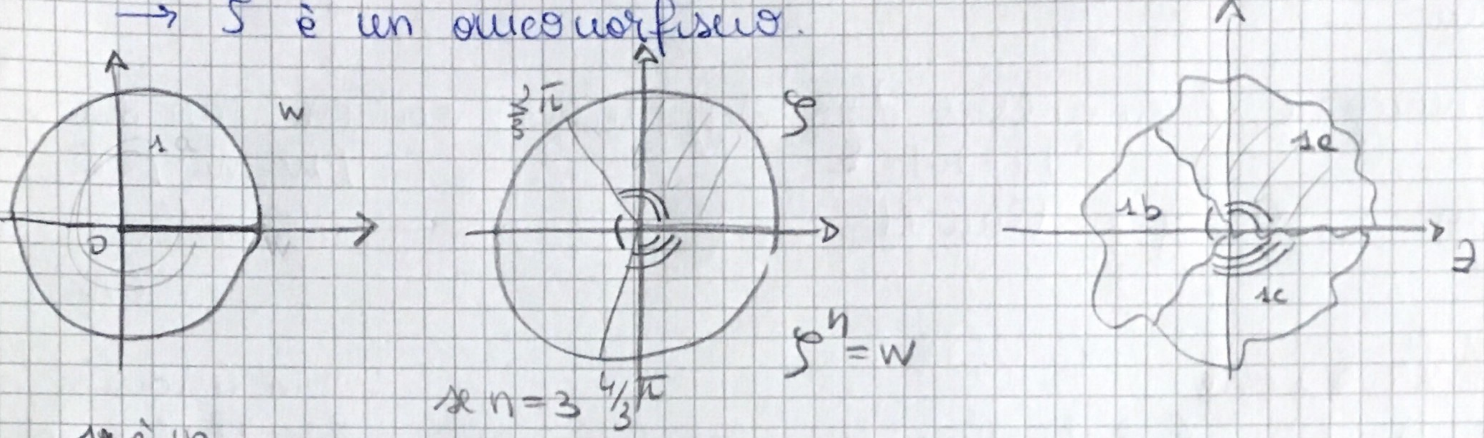
$|g(z) - g(0)| < |g(0)|$ $\qquad$ sia $h(z) := \sqrt[n]{g(z)}$

$h(z) := \sqrt[n]{g(z)}$ $\qquad (h(z))^n = g(z)$

$\to f(z) = z^n (h(z))^n = \zeta(z) = (z\,h(z))^n$

$\zeta(z) = z\,h(z)$ e $\zeta'(0) = h(0) \neq 0$

$\to \zeta$ è un omeomorfismo.



1a è in
biezione con 1

1b è in biezione con 1, 1c è in biezione con 1

Principio del Massimo [Teor 12 (A)]

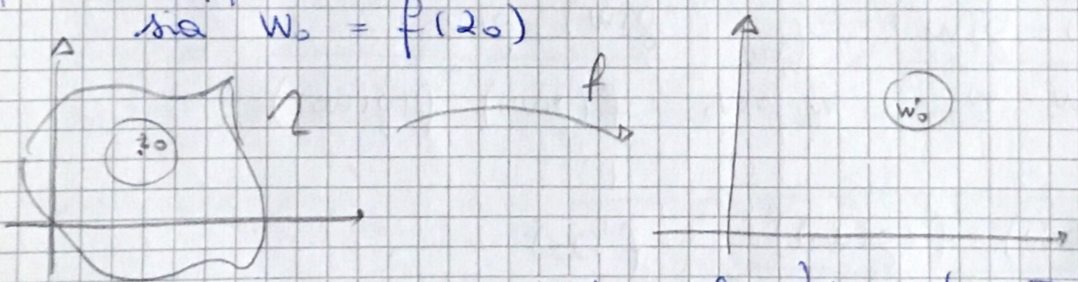
f analitica, $f \not\equiv c$ in Ω

Allora $|f(z)|$ non ha massimo in Ω

dim

p.A supponendo $z_0 \in \Omega$ sia un max di $|f(z)|$

sia $w_0 = f(z_0)$



sia il disco di centro w_0 e raggio δ

il punto $\frac{1+\delta}{2} w_0$ ha modulo maggiore di w_0

$$\left|\left(1+\frac{\delta}{2}\right) w_0\right| = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)|w_0|$$

CVD

Corollario

sia $f: \Omega \mapsto \mathbb{C}$, continua in $\overline{\Omega}$

allora il max di $|f(z)|$ su $\overline{\Omega}$ allora max $\in \partial\Omega$

dim

non può stare dentro per prima $\to$ sta sul bordo

CVD