(Esercitazione) con Luca Biasco 18/03/19

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad a_n \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$$

se $a_n = 1$ → $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge se $|z|<1$

ho la SERIE GEOMETRICA

se $|z|>1 \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z^n| = \infty \rightsquigarrow$ non soddisfatte le condizione necessaria

se $|z|<1$

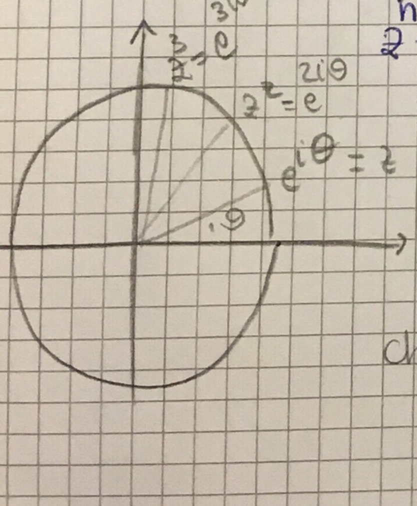
$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \frac{1-z}{1-z} = \frac{1}{1-z} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} z^k - z^{k+1}}_{1-z+z-z^2+z^2-\dots+z^{n-1}-z^n} = \frac{1-z^n}{1-z} \xrightarrow[|z|<1]{n\to+\infty} \frac{1}{1-z}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

se $|z|=1$ non converge

se $z=1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty$

se $|z|=1,\ z\neq 1 \longrightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} z^n$? non esiste questo limite



$$z^n = e^{i\theta n} \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

se $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ ho z^n moto periodico e ogni tot torno a 1 ($\rightsquigarrow \theta = 2\pi \frac{p}{q}$, $(p,q)=1$)

se $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

chiusura $\overline{\{z^n . n\in\mathbb{Z}\}} = \{|z|=1\} = S^1$

è un insieme denso $\rightsquigarrow$ non c'è limite

converge dentro al cerchio, diverge fuori (dato $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$), con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n, z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} =: R \quad \text{raggio di convergenza}, \quad 0 \leq R \leq \infty$$

con la convenzione che se

- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \to R = 0$
- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \to R = \infty$

esempio

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = +\infty \to \left(\frac{1}{0}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n (-1)^{n+1}}{n}$ $\quad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$

Teorema [Abel]

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente $\forall z$ con $|z| < R$

la convergenza è uniforme in ogni disco $|z| \leq \rho$, $\rho < R$

(è anche totale $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z| \leq \rho} |a_n z^n|$ converge)

(ii) se $|z| > R$ la serie non converge

(iii) se $|z| < R$ $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è analitica (olomorfa)

$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ e il suo raggio di convergenza è $= R$

$f(z)$ è C^{∞} (nel suo raggio di convergenza)

dim

(i) se $|z| < R$ sia ρ t.c. $|z| < \rho < R$ $\longrightarrow \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$\to \exists\, n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$

se prendo $|a_n z^n| < |z^n| \frac{1}{\rho^n}$

$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n < \infty$ converge $\rightsquigarrow \sum |a_n z^n|$ converge assolutamente

definitivamente

(segue uniforme)

va dimostrata la convergenza totale $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z|\leq\rho} |a_n z^n|$

sia $|z| \leq \rho < R$ $\exists \rho'$ $\rho < \rho' < R$ $\exists n_0$ tc $\forall n \geq n_0$ $|a_n| < \frac{1}{\rho'^n}$

e $|a_n z^n| \leq \frac{|z|^n}{(\rho')^n}$ e $\sup_{|z|<\rho} |a_n z^n| \leq \frac{\rho^n}{(\rho')^n}$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sup |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n < \infty$ per confronto con la serie geometrica

definitivamente

(ii) se $|z| > R$ sia ρ tc $R < \rho < |z|$ $\rightarrow \frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$\exists \infty\, n$ tc $\frac{1}{\rho} < \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{\rho^n} < |a_n|$ $\exists \infty\, n > \frac{1}{\rho}$

$|a_n z^n| > \frac{|z|^n}{\rho^n} > 1$ allora il limite non è 0

$\frac{|z|^n}{\rho^n} = \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$, $\frac{|z|}{\rho} > 1$ va a ∞, è un oggetto > 1 che è elevato alla n

(iii) il raggio di convergenza è lo stesso:

$\limsup \sqrt[n]{|a_n n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

voglio mostrare che $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ $f_1(z)$

f è derivabile e la sua derivata è f_1

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S_n(z) + R_n(z)$ $f_1(z) = \lim_{n\to+\infty} S_n'(z)$

$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, $R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ con $S_n'(z) = \sum_{k=1}^{n-1} n a_n z^{n-1}$

$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) =$ voglio mostrare che è piccola per z vicino a z_0 $|z|, |z_0| < \rho < R$

$= \left(\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right) + \left(S_n'(z_0) - f_1(z_0)\right) + \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}$

sono tutti piccoli, infatti,

$$\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(z^k - z_0^k)\, a_k}{z - z_0} =$$

ma $\frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} = z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1} \right)$$

k termini

$|z|, |z_0| < \rho < R$

$\rightsquigarrow \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_n|\, k \rho^{k-1}$ e converge

per criterio della radice $\limsup \sqrt[n]{|a_n| k \rho^{k-1}} = \frac{\rho}{R} < 1$

($\rightsquigarrow$ coda di una serie, converge)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tc $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

e $\left| S_n'(z_0) - f_1(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\left(\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0) \right)$$

sia $n \geq n_0$, $\exists \delta$ tc se $|z - z_0| < \delta$

$\rightsquigarrow \left| \frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

se $n \geq n_0$ e se $\exists \delta > 0$ tc

$\rightsquigarrow$ se $|z - z_0| < \delta \longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| < \varepsilon$

CVD

$\rightsquigarrow f(z)$ è derivabile e la sua derivata è $f_1(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \longrightarrow f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\, k(k-1)\cdots(k-n+1)\, z^{k-n}$$

CVD

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}$$

$f^{(n)}(0) = a_n\, n!$

$$\longrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Longrightarrow f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

FORMULA DI TAYLOR