Roma, 20/05/2019

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli $b_J \in \mathbb{C}$, $1 \le J \le N$.
Ad ogni polo b_J corrisponde una parte singolare $P_J\left(\frac{1}{z-b_J}\right)$ con P_J polinomio ~~di~~ con termine noto $P(0)=0$.

$$P_J = \frac{a_n}{(z-b_J)^n} + \_\_ + \frac{a_1}{z-b_J} \qquad a_1 = \text{residuo.}$$

polo di ordine n

$f = P_J + g_J$ in un intorno di b_J e inoltre g_J è analitica.

$\to g_J = f - P_J$ analitica $\Rightarrow f - \sum_{J=1}^{N} P_J$ è INTERA

PROBLEMA: Cosa succede se $\{b_J\}$ sono infiniti? Possiamo assegnare arbitrariamente una successione $\{b_J\}$, $b_J \to \infty$ e polinomi P_J e trovare una f.ne meromorfa con tali singolarità? Qual è la sua forma?

TEOREMA MITTAG-LEFFLER ($\leftarrow$ è un tipo solo)

Sia $\{b_J\}$ una sequenza di numeri complessi con $\lim_{J\to\infty} b_J = \infty$ e siano P_J polinomi senza termini noti, ALLORA $\exists$ funzioni meromorfe con poli b_J e parte singolare $P\left(\frac{1}{z-b_J}\right)$.

Inoltre, se f è meromorfa con poli b_J e parte singolare $P\left(\frac{1}{z-b_J}\right)$, ALLORA $\exists$ polinomi p_J e una funzione intera g tale che

$$f(z) = \sum_J \underbrace{\left(P_J\left(\frac{1}{z-b_J}\right) - p_J(z)\right)}_{g_J} + g(z)$$

(non i g_J di prima)

e la serie converge uniformemente sui cpt $K \not\ni b_J$ e assolutamente in $\mathbb{C} \setminus \{b_J\}$

DIM OSS. La convergenza della serie dipende dalla coda quindi possiamo assumere $b_J \neq 0$
(Anche se potremmo assumerli al di fuori di un disco di raggio grande.)
(Possiamo anche assumere $|b_J| \nearrow \infty$ ma non ha importanza)

$P_J\left(\frac{1}{z-b_J}\right)$ è analitica per $|z| < |b_J|$ e si può quindi fare Espansione di Taylor attorno 0 (Maclaurin)

Sia $p_J :=$ polinomio di Maclaurin di P_J di grado n_J

Stimiamo $\left| P_J\left(\frac{1}{z-b_J}\right) - p_J(z) \right|$

RIP (THM 8 CAP 4 SEC 3.1 pag 125) Taylor: Se $f(z)$ è anal in Ω contenente $a \to$ è possibile scrivere

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta$$

$\longrightarrow f(z) = T_n(z,0) + R_n.$

Inoltre $|R_n| \leq \frac{MR}{R-|z|}\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{n+1}$ con $M = \max_{|\zeta - a| = R} |f|$

Nel nostro caso $a = 0$, $R = |b_J|/2$ e poi denotiamo $M_J = \max |P_J|$ per $|z| \leq \frac{|b_J|}{2}$ otteniamo:

$$\left| P_J\left(\frac{1}{z-b_J}\right) - p_J(z)\right| \leq 2M_J \left(\frac{2|z|}{b_J}\right)^{n_J+1} \leq \quad \boxed{\forall\ |z| \leq \frac{|b_J|}{4}}$$

$$\leq 2M_J\left(\frac{2}{|b_J|}\cdot\frac{|b_J|}{4}\right)^{n_J+1} \leq \frac{M_J}{2^{n_J}}$$

Scegliamo n_J: $\frac{M_J}{2^{n_J}} \leq \frac{1}{2^J} \longrightarrow 2^{n_J} \geq 2^J M_J$

Con questa scelta la serie $\sum_J g_J$ converge totalmente in $\mathbb{C} \setminus \{b_J\}$ (è maggiorata dalla serie geometrica $\sum_J 1/2^J$) quindi uniform. sui cpt di $\mathbb{C} \setminus \{b_J\}$.

Per il thm Weierstrass $\sum g_J$ è anal su $\mathbb{C} \setminus \{b_J\}$ e inoltre ha la stessa parte singolare di f in b_J.

$\longrightarrow g = f - \sum_J g_J$ è INTERA.

□

"ESERCIZI" Dimostra le seguenti formule:

(1) $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$

(2) $\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$

(3) $\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{m \to \infty} \sum_{-m}^{m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}(-1)^n$

Oss. Tra le scritture in (1) e (3) cambia la dipendenza dalla simmetricità dell' limite. Il primo converge indipendentemente dai limiti a $+$ e $-\infty$.

DIM $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$

per $z \neq n \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{|1 - \frac{z}{n}|^2} \sim \frac{1}{n^2} \longrightarrow$ convergenza totale per $z \notin \mathbb{Z}$.

$f(z)$ ha poli doppi in $z = n \in \mathbb{Z}$ e parte singolare $\frac{1}{(z-n)^2}$

$\longrightarrow P_n(w) = w^2$.

$\operatorname{sen} \pi z$ ha zeri semplici in $z \in \mathbb{Z} \longrightarrow$ Anche $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$ ha poli doppi in $z = n$ e parte singolare $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Infatti: $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{\pi^2}(z-n)^2} \frac{\pi^2(z^2 - n^2)}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$ → anal vicino a $n = z$ dove vale $1 + h(z)$ con $h(z)$ anal vicino 1. (*)

$\longrightarrow$ parte sing $\frac{1}{(z-n)^2}$

(*) $\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} z}{z}} = \left(1 + \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) = \frac{1}{1 - z^2 g(z)} = \sum_{k \geq 0} (z^2 g(z))^k = 1 + z^2(g) + \ldots$

Quindi $g := \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - f(z)$ è intero.

<u>IDEA</u>: Mostrare che è limitato $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ è costante $\Big\rangle \to g \equiv 0$.
Far vedere che $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$

Oss che $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ e $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$ sono entrambe di periodo 1. $\to$ anche

Per $z = x+iy$ abbiamo: $\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy =$
$= \operatorname{sen} x \cosh y - i \cos x \operatorname{senh} y.$

$\to |\operatorname{sen}(x+iy)|^2 = \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y$

$|\operatorname{sen}(\pi z)|^2 = \cosh^2 \pi y - \cos^2 \pi x$

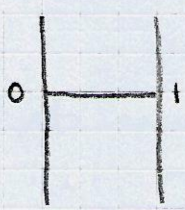
$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$ tende uniformemente a 0 per $|y| \to \infty$

Anche $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ ha la stessa proprietà:

Infatti, la convergenza è uniforme per $|y| \geq 1 \Rightarrow$ portiamo il lim nella serie e ogni termine va a 0.

$\to g(z)$ tende uniformemente a 0 per $|y| \to \infty$.

Dobbiamo solo dim che $|g(z)|$ è limitato. Per la periodicità di g è sufficiente dim ciò nella striscia $0 \leq x \leq 1$.



$0 < x < 1 \qquad y \in \mathbb{R}.$

$|f(x)| = \sum \frac{1}{(x-n)^2 + y^2}$

$\sum \frac{1}{(x-n)^2} = \sum \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{n} - 1)^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2} + 4 \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$

Dato $\varepsilon > 0$, sia N: $4 \sum 1/n^2 < \varepsilon/2$

$|f(x)| = \sum_{n \leq N} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} + 4 \sum_{n > N} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{y^2} + \frac{\varepsilon}{2} =$

$= \frac{2N+1}{y^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ se $|y| > R$

$\longrightarrow$ Se $|y| > R$ f è limitata in $0 < x < 1$ e $\lim_{|y| \to +\infty} f =$

$\longrightarrow g \equiv 0.$

$\square$

(2) $(\pi \cot g\, \pi z)' = \dfrac{-\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$

$\dfrac{1}{(z-n)^2} = -\left(\dfrac{1}{z-n}\right)'$ ma $\sum \dfrac{1}{z-n}$ non converge.

quindi aggiungiamo una cost

$\longrightarrow \dfrac{1}{z} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(\dfrac{1}{z-n} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \dfrac{z}{n(z-n)} \left(\sim \dfrac{1}{n^2} \text{ conv}\right)$

$= \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{z}{n(z-n)} + \sum_{n\leq 1} \dfrac{z}{n(z-n)} = \longleftarrow m=-n$ e poi richiamo n (var. muta)

$= \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{z}{n(z-n)} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{z}{-n(z+n)} =$

$= \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{z}{n(z-n)} - \dfrac{z}{n(z+n)} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cancel{z^2}+zn-\cancel{z^2}+zn^2}{n(z-n)(z+n)}$

$= \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{2z}{(z^2-n^2)} \longrightarrow \pi \cot g\, \pi z = \dfrac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{2z}{(z^2-n^2)}$

(3) Consideriamo $\sum_{-m}^{m} \dfrac{(-1)^n}{z-n}$ e dividiamo termini pari e dispari.

$\sum_{-(2k+1)}^{(2k+1)} \dfrac{1}{z-n} = \sum_{n=-k}^{k} \dfrac{1}{z-2n} - \sum_{n=-k-1}^{k} \dfrac{1}{z-1-2n}$

Comparando con l'uguaglianza di (2), troviamo che il limite è $\dfrac{\pi}{2} \cot g \dfrac{\pi z}{2} - \dfrac{\pi}{2} \cot g \dfrac{\pi(z-1)}{2} = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = \lim_{m\to\infty} \sum_{-m}^{m} (-1)^n \frac{1}{z-n}.$$