Lezione 22/05/19

Prodotti Infiniti

$$\left[\sin \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right] \quad *$$

esercizio [A] p. 193. n°1

Dimostrare che $\frac{1}{2} = \prod_{2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

dim

$$\prod_{2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} P_n \quad \text{con} \quad P_n = \prod_{2}^{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{2}^{n}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \prod_{2}^{N}\frac{1}{n^2}\cdot\prod_{2}^{N}(n-1)\prod_{2}^{N}(n+1) =$$

$$= \prod_{2}^{N}\frac{1}{n^2}\prod_{2}^{N-1} n \prod_{3}^{N+1} n =$$

da $n=3$ a $N-1$ si semplificano

$$= \underbrace{\frac{1}{4}}_{1°}\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{\text{ultimo}}\cdot\underbrace{\frac{2}{1}}_{1°}\cdot\underbrace{N(N+1)}_{\text{ultimi } 2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = (1 - z^2)\prod_{2}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-z^2}\,\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{2}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

se $z = 1 + w$, $\sin(\pi + \pi w) = \sin(\pi w)$

$$\frac{1}{(z+1)(-z+1)}\,\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{1}{-w}\,\frac{1}{2+w}\,\frac{1}{(w+1)\pi}\sin(\pi + \pi w)$$

$$= \frac{1}{2+w}\,\frac{\sin \pi w}{\pi w}\,\frac{1}{1+w} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ come caso speciale $* \longrightarrow \prod_{2} 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$

Problema

Dati $p_n \in \mathbb{C}$, $P_n := \prod_{k=1}^{n} p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$

Se $p_n \neq 0$ $\quad \prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \iff \lim P_n = P$

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ converge se ci sono al più un numero finito di $p_n = 0$ e se il $\prod_{n:\,p_n\neq 0} p_n$ converge

Osservazione

se $\prod_n p_n$ converge $\Longrightarrow \lim p_n = 1$ (se il prodotto converge e $\neq 0$)

(possiamo assumere $p_n \neq 0 \ \forall n$)

$1 \longleftarrow \frac{P_n}{P_{n-1}} = p_n$ condizione necessaria che $p_n \to 1$ (come per le serie)

- se $p_n := a_n + 1$, $a_n \longmapsto 0$ se $\prod p_n$ converge

$p_1 \cdots p_n$ caso reale con $a_n > -1$ mi posso fare il log

$e^{\log 1 + a_n} \cdots e^{\log 1 + a_1} = \exp\left(\sum_1^n \log(1+a_k)\right) \simeq \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$

- $p_n = 1 + a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq -1$ (li assumo diversi ai fini della convergenza)

$S_n = \sum_1^n \mathrm{Log}(1+a_k)$ dove $\mathrm{Log}\, z$ è il ramo principale in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e $|\mathrm{Arg}\, z| < \pi$

$P_n = \prod_1^n (1+a_k)$

$\mathrm{Log}(1) = 0$

e su $(-\infty, 0]$, $\mathrm{Log}(-1) = \pi$, ossia (per continuità)

$\mathrm{Arg}(x) = \pi \quad \forall x < 0$

Proposizione

$\prod p_n \neq 0$ e $P \neq 0$

S_n converge $\Longleftrightarrow$ converge P_n e $P \neq 0$

e in caso di convergenza $e^{S_n} \longmapsto P$ $\left(\begin{array}{l} S_n \longmapsto S \\ P_n \longmapsto P \end{array}\right)$

ma in generale non è vero che $S_n \longmapsto \mathrm{Log}\, P$

ma $S_n \longrightarrow \mathrm{Log}\, P + 2\pi i h \quad h \in \mathbb{Z}$

dim

$\Rightarrow)$ $S_n \longmapsto S$, $\exp(S_n) \longmapsto \exp(S)$

$e^{S_n} = e^{\sum_1^n \log(1+a_k)} = \prod_1^n e^{\log(1+a_k)} = \prod_1^n 1 + a_k$

$\downarrow$

$e^S =: P$

$\Leftarrow$ Assumiamo che $P_n \longrightarrow P$; $\mathrm{Log} = \mathrm{Log}$;

$\mathrm{Log}\, \frac{P_n}{P} \longmapsto 0$; $\odot$

$\mathrm{Log}\, \frac{P_n}{P} = \mathrm{Log}\, P_n - \mathrm{Log}\, P$ in generale non è vera questa formula

$S_n := \mathrm{Log}\, P_n$

Osservazione

$\frac{\log(1+z)}{z} \xrightarrow{z\to 0} 1$ è vero solo se $\log(1)=0$
(ramo principale)

Infatti: su un qualsiasi altro ramo
$\begin{cases}\log z \\ \log 1 = i2\pi k\end{cases}$ è falso il limite

dim

- è vero sul ramo reale ⇝ per continuazione tende a 1 anche nei complessi
- per serie $\underset{(r.p.)}{\log_c}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}$ $\forall\, |z|<1$

perché il raggio di convergenza è 1
$\left(\lim \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}\right)$

è vero che $\log \frac{P_n}{P} = \text{Log}_c P_n - \text{Log}_c P + 2\pi i h_n$ con $h_n \in \mathbb{Z}$
(∃ h_n t.c. sono =)
$= S_n - \text{Log}_c P + 2\pi i h_n$

⇝ $2\pi i (h_{n+1}-h_n) = \text{Log}\frac{P_{n+1}}{P} - \text{Log}\frac{P_n}{P} - (S_{n+1}-S_n)$

prendo la parte immaginaria

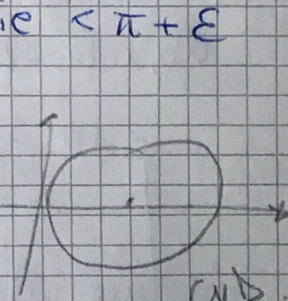
$$2\pi(h_{n+1}-h_n) = \underbrace{\text{Arg}_c \frac{P_{n+1}}{P} - \text{Arg}_c\frac{P_n}{P}}_{\to 0,\ P_n \to P} - \underbrace{\text{Arg}(S_{n+1}-S_n)}_{|\cdot| < \pi}$$

$< \pi \Rightarrow h_{n+1} = h_n$

il termine di dx in valore assoluto è definitivamente $< \pi + \varepsilon$

⟶ definitivamente $h_n = h \in \mathbb{Z}$

allora $\log(1+a_k)$ definitivamente $\in \{|z-1|<1\}$



def

P_n converge assolutamente $\overset{def}{\iff}$ conv ass $\sum \log(1+a_k)$

$1 \leftarrow \frac{\log(1+z)}{z}$ $\overset{prop.}{\iff}$ conv ass $\sum a_k$

$\frac{|z|}{2} < |\log(1+z)| < 2|z|$

per $|z|<\delta$

es [A] P.193 no.3

Provare che $\prod_1^\infty \left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ conv ass e unif su ogni cpt.
compatto

dim

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = e^{\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}}$$

escludiamo i finiti interi negativi per cui fa 0

$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n} = O\left(\left(\frac{z}{n}\right)^2\right), \text{ ossia } \left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right| \leq \frac{M}{n^2}$$
$$\forall n \geq N(z)$$

se $|z| \leq R$, $N = N(R)$

($\rightsquigarrow$ è uniforme sui compatti)

$$\sum_n \log\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right)$$ la convergenza dipende dalla coda della serie $\rightsquigarrow$ per n grandi $\geq N$

In $|z|<R$, sia $N : n \geq N$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \in B_1(1)$$

$$\sum_{n>N} \log\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right) = \sum_{n>N}\left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right)$$

Problema

Quand'è che $\log(ab) = \log a + \log b$? (log nel ramo principale)

sull'asse reale è vero

$\rightsquigarrow$ il problema equivale a $\operatorname{Arg}(ab) = \operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b$?

$ab, a, b \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$

in generale non è vero:

$a = i = e^{i\frac{\pi}{4}3}$; $b = e^{i\frac{\pi}{4}3} \Rightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{4}3+\frac{\pi}{4}3\right)} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$, $\Rightarrow \operatorname{Arg}(ab) = -\frac{1}{2}\pi$

ma $\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \neq -\frac{\pi}{2}$

$\rightsquigarrow$ se $\operatorname{Re} a, b > 0 \Rightarrow$ è vero che $\operatorname{Arg}(ab) = \operatorname{Arg}(a) + \operatorname{Arg}(b)$