Lezione 24/05/19

Osservazione

Se g intera $\to e^g$ è intera e $\neq 0$

Viceversa se f è intera e $\neq 0 \Rightarrow f = e^g$ con g intera

dim

$\frac{f'}{f}$ intera $\xRightarrow{\text{(thm di Cauchy)}} \exists\, g$ intera : $g' = \frac{f'}{f}$

allora $(f e^{-g})' = e^{-g}\left(f' - \frac{f'}{f} f\right) = 0 \Rightarrow f e^{-g} = c \neq 0$

$\rightsquigarrow f = e^g c = e^{\tilde{g}}$ con $\tilde{g}$ intera $\tilde{g} = g + \log c$

CVD

Questa è la rappresentazione più generale di f intera senza zeri

- Supponiamo ora f intera con uno zero di ordine m nell'origine ($m \geq 0$) e zeri $a_1, \dots, a_N$ (con molteplicità)

$\Longleftrightarrow f(z) = z^m e^g \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)$ con g intera

dim

$\dfrac{f(z)}{z^m \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)}$ è una funzione intera (le singolarità isolate 0 e a_i sono removibili) e $\neq 0$

e questa rappresentazione è unica (g è unica, a meno di multipli di $2\pi i$)

Ma che succede se ho infiniti zeri? ($\sin \pi z$ ha zeri semplici su $\mathbb{Z}$)

Teorema di Weierstrass

Dato $m \geq 0$ e a_i con $a_i \to \infty$ ($a_i \neq 0$)

Allora $\exists$ una funzione intera con zeri z^m e a_i

Viceversa

Se f è intera con zeri z^m e $a_i \neq 0$ con $a_i \to \infty$

Allora $\exists\, g$ intera e numeri naturali m_n :

$$f = z^m e^g \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

dove i prodotti conv. assolutamente e unif. sui compatti

Convergenza del prodotto

Se $r_n(z) = \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z)$ e $\sum_1^N r_n$ conv

$\Longrightarrow$ converge $\prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n}$ $\longrightarrow$ r.p. in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e $\log 1 = 0$

Infatti

$$e^{\sum_1^N r_n} = \prod_1^N e^{r_n} = \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n}$$

prendo P_n = polinomio di Taylor di ordine m_n di di $\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$

$$\log(1-u) = -\sum_1^\infty \frac{u^n}{n} \quad ; \quad r_n = -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \dots$$

voglio far vedere conv (totale ?) sul disco di raggio R

[A]: $|a_n| > R$
$|z| \leq R$

$$\dots = -\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{m_n+j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+j}$$

$$\rightsquigarrow |r_n| \leq \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right)^{-1} \frac{1}{m_n+1} \qquad (19) \quad \forall n : |a_n| > R$$

Supponendo che $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} < \infty$ converge (se $m_n = n$)

$\xrightarrow[(19)]{\text{stime}}$ $r_n \longrightarrow 0$ Definitivamente $|a_n| \geq 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow |r_n| \leq 2 \sum \frac{1}{m_m+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$$

$\longrightarrow \sum |r_n| < \infty \quad \forall |z| < R$

$\xrightarrow[\text{Weier.}]{\text{thm}}$ $\sum_1^N r_n \longmapsto \sum_1^\infty r_n$ funzione analitica.

per succ

CVD thm W.

$F(z) := z^m \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)}$, F è intera con zeri esatti in 0 con molteplicità m e in $a_n \longrightarrow \infty$

$\frac{f}{F}$ ha sing rimovibili in 0 e in a_n e non ha zeri

$f = F e^g$ con g intera

$\longmapsto \sin\pi z$

def

Funzioni intere di genere (GENUS) finito:

$$f = z^m e^g \prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}$$

con g polinomio e $h := \begin{cases} \sum \frac{1}{|a_n|^h} = +\infty \\ \sum \frac{1}{|a_n|^{h+1}} < \infty \end{cases}$

genere di $f = \max\{\deg(g), h\}$

Oss

(1) se $\exists\, k : \sum \frac{1}{|a_n|^k} < \infty \implies h+1 = \min\{k \in \mathbb{N} : \sum \frac{1}{|a_n|^k} < \infty\}$

(2) genere 0 : polinomio è costante

$$f = z^m e^\alpha \prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right) \ ; \ \sum \frac{1}{|a_n|} < \infty, \ \alpha \in \mathbb{C}$$

(3) genere 1 : $\begin{cases} \bullet\ f = C z^m e^{z\alpha} \prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \ , \ \sum \frac{1}{|a_n|} = +\infty, \ \sum \frac{1}{|a_n|^2} < \infty \iff h = 1 \\ \alpha \in \mathbb{C} \\ \bullet\ f = C z^m e^{\alpha z} \prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_n}\right) ; \ \sum \frac{1}{|a_n|} < \infty \quad \alpha \neq 0 \end{cases}$

$f = \sin\pi z$ gli zeri di f sono $a_n = n \in \mathbb{Z}$

$$\sum \frac{1}{|n|} = +\infty \quad \text{ma} \quad \sum \frac{1}{|n|^2} < \infty \longrightarrow h = 1$$

$$f = \sin\pi z = z e^g \underbrace{\prod_{n\neq 0} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}}_{\text{genere } 1}$$

$n \neq 0$

$$\left[\frac{(g_1 \cdots g_N)'}{g_1 \cdots g_N} = \frac{g_1'}{g_1} + \dots + \frac{g_N'}{g_N} \right.$$

se facciamo la derivata logaritmica (nei punti diversi dagli zeri)

$$\frac{f'}{f} = \pi \cot g\, \pi z = \frac{1}{z} + g' + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{z}{n}} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{z} + g' + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \pi \cot g\, z\pi$$

$\implies g' = 0 \implies g = \text{cost}$

ma $\frac{\sin \pi z}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} \pi \longrightarrow e^{g} = \pi$

canonica

ma $\sin \pi z = z\pi \prod_{n \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \longrightarrow \sin \pi z$ ha genere 1

$$= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} =$$

$$= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Teoremi

- Teorema delle mappe di Riemann

  Dato $\Omega \ni z_0$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ sempl. connesso

  $\exists!$ trasf conf $f : \Omega \longrightarrow B_1(0)$: $\begin{cases} f'(z_0) > 0 \\ f(z_0) = 0 \end{cases}$

- Teorema di Picard

  f intera tc $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ $a \neq b$ e $f(z) \neq a, b$ $\forall z$

  $\longrightarrow f \equiv cost$