Lezione 25/03/19

def

(1) $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ $\quad f(t) =: u(t) + iv(t)$

u, v (regolari) integrabili su $[a,b]$

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

(2) Sia $\gamma := \{ z(t) \mid t \in [a,b] \}$, C^1 a tratti

(curva orientata con l'orientamento indotto da z)

$f \in C(\gamma, \mathbb{C})$

non dipende dalla parametrizzazione

non integrali curvilinei, sono

$$\rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx)$$

$dz = dx + i\,dy$ 1-forma diff

ES

$$= \int_a^b f \circ z(t) \cdot z'(t)\,dt$$

prodotto complesso

ES

è indipendente dalla parametrizzazione di γ (dipende dall'orientamento)

OSS

- γ curva orientata $= \{ z(t)$ t.c. $t \in [a,b] \}$

  $-\gamma := \{ z(-t) \mid t \in [-b,-a] \}$

- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz := \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz$

- $\displaystyle\int_{-\gamma} f\,dz \overset{ES}{=} -\int_\gamma f\,dz$

$f(z)\,dz$ agisce su curve $\quad f\,dz : \gamma \longmapsto \mathbb{C}$

diventa un funzionale complesso lineare

funzionale sullo spazio delle curve orientate in Ω (dominio di f)

(3) $$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,dt$$ INTEGRALE CURVILINEO

(è indipendente dall'orientamento)

$\displaystyle\int |dz| =:$ lunghezza di γ

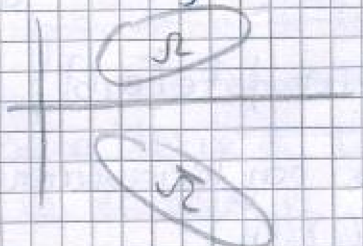
(4) $\int_\gamma f \, d\bar z := \int_\gamma f \, \overline{dz} := \int_a^b f \circ z \, \overline{z'(t)} \, dt$

$$= \overline{\int_a^b \overline{f \circ z} \, z'(t) \, dt} = \overline{\int_a^b \overline{f(z)} \, dz} \overset{NO}{\neq} \overline{\int_a^b \bar f \, dt}$$

def

f analitica su Ω, $\bar f : \bar\Omega \longmapsto \mathbb{C}$, $\bar f(z) := \overline{f(\bar z)}$, $\bar z \in \Omega$

ES $\rightarrow$ [$\bar f$ è analitica su $\bar\Omega$



Proprietà

(1) $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f| \, dt$

dim

$f(t) \equiv 0$ ovvio

sia $f(t) \neq 0 \longrightarrow \int_a^b f(t) \, dt = e^{i\vartheta} \left| \int_a^b f(t) \, dt \right|$

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| = e^{-i\vartheta} \int_a^b f(t) \, dt =$$

$$= \int_a^b e^{-i\vartheta} f(t) \, dt$$

$$\int_a^b U(t) + i \underbrace{\int_a^b V(t)}_{=0} = = \int_a^b Re\left(e^{-i\vartheta} f(t)\right) dt \leq \int_a^b \left| Re \, e^{i\vartheta} f(t) \right| dt =$$

$$= \int_a^b |f(t)| \, dt$$

alternativamente

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) \qquad \delta = \sup(t_{i+1} - t_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)| (t_{i+1} - t_i) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int_a^b |f| \, dt$$

vale se $f \in C([a,b], X)$ (X spazio normato completo)

Banach

CVD

(2) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,|dz|$

Teorema

(i) $p, q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continue (regione connessa)

$\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ dipende solo dagli estremi di γ $\iff$ $p\,dx + q\,dy$ è esatta
$\left(\exists\, F \in C(\Omega) \mid F_x = p,\ F_y = q\right)$

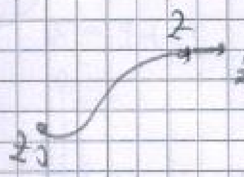
(ii) $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua

$\int_\gamma f\,dz$ dipende solo dagli estremi di γ $\iff$ $f = F'$ con F (analitica) su Ω

dim

(i) $\Rightarrow$) Fisso $z_0 \in \Omega$, $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\omega)\,d\omega := \int_{\gamma(z_0,z)} f(\omega)\,d\omega$

con $\gamma(z_0, z)$ una qualunque curva che "va" da z_0 a z



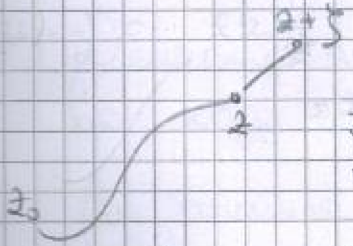
$$\frac{1}{x}\left(\int_{z_0}^{z+x} f - \int_{z_0}^{z} f\right) = \frac{1}{x}\int_{z}^{z+x} f = \int_0^1 f(z+tx)\,dt \longrightarrow f(z)$$

derivate parziali $\left(\frac{F(z+x)-F(z)}{x}\right)$

$z(t) = z + tx \quad t \in [0,1]$
$z'(t) = x$

(ii) $\Rightarrow$) Fisso $z_0 \in \Omega$, $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\omega)\,d\omega := \int_{\gamma(z_0,z)} f(\omega)\,d\omega$

con $\gamma(z_0, z)$ una qualunque curva che "va" da z_0 a z



$$\frac{1}{\xi}\left(\int_{z_0}^{z+\xi} f - \int_{z_0}^{z} f\right) = \frac{1}{\xi}\int_{z}^{z+\xi} f = \int_0^1 f(z+t\xi)\,dt \xrightarrow{\xi \to 0} f(z)$$

$z(t) = z + t\xi$
$z'(t) = \xi$

$\Leftarrow$) $\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma F'\,dz =$

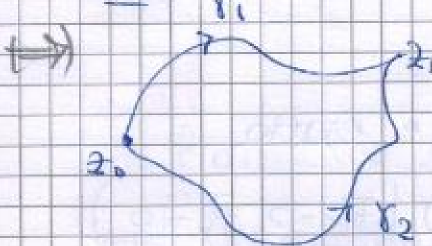
$$= \int_a^b (F' \circ z)(t)\, z'(t)\,dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} F \circ z\right) dt \overset{TFC}{=} F(z(b)) - F(z(a))$$

Corollario

Se $f = F'$ con F analitica su Ω $\Longleftrightarrow$ $\int_\gamma f\,dz = 0$ $\forall\, \gamma$ chiusa $(z(a) = z(b))$

dim

$\Longrightarrow$



$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0$$

cvd.

Esercizi

p108 [A] (1) Calcolare $\int_\gamma x\,dz$ con $\gamma = \sigma(0, 1+i)$

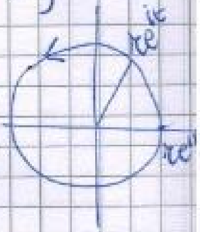
$= \{ t(1+i) \text{ tc } t \in [0,1] \}$

$= \{ (t,t) \text{ tc } 0 \le t \le 1 \}$

Sol

$$(1+i)\int_0^1 t\,dt = \frac{i+1}{2}$$

(2) Calcolare in 2 modi $\int_\gamma x\,dz$ con $\gamma = \{ re^{it} \mid t \in [0, 2\pi] \}$



$\oint_{|z|<r} x\,dz$ primo modo usando la definizione:

$$\int_0^{2\pi} r^2 \cos t\, e^{it}\,dt = r^2 i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \underbrace{i \cos t \sin t}_{\text{fa 0 integrato}})\,dt = i r^2 \pi$$

$dz = rie^{it}\,dt$

$$2\int_0^{2\pi} \cos^2 t = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2\pi$$

secondo modo usando il teorema.

$$\oint_{|z|=r} x\,dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=r} (z + \bar z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=r} \bar z\,dz = \frac{r^2}{2}\int_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz = \dots$$

OSS se $z = re^{it}$, $\bar z = re^{-it} = \frac{r^2}{re^{it}} = \frac{r^2}{z}$

$$\dots = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, r i e^{it}\,dt = \frac{r^2}{2} 2\pi i = r^2 \pi i$$

terzo metodo

$$\int_{|z|=r=\gamma} x\,dz = \underbrace{\overbrace{\int x\,dx}^{=0}}_{\text{dispari}} + i\int x\,dy = r^2 \pi i$$

(3) $\displaystyle\int_{\gamma \text{ curve chiuse}} z^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n\in\mathbb{N}_0 ,\ z^n = \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' \\ 0 & \text{se } n \in -\mathbb{N}\ (\gamma \not\ni 0),\ n\neq -1 \\ ? & n=-1 \text{ dipende da } \gamma \end{cases}$

- prendo γ sul cerchio, ad esempio

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, re^{it} i\, dt = 2\pi i$$

$z = re^{it}$

$z' = ri\, e^{it}$

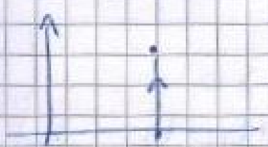
- prendo γ curva chiusa

$\gamma \subseteq \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$

su $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ è $\operatorname{Log} z$ funzione $\rightarrow (\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$

$\rightarrow$ applico il teorema e fa 0

$z = 1 + it$



$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = i \int_0^1 \frac{dt}{1+it} = i \int_0^1 \frac{(1-ti)\,dt}{1+t^2}$$

e così via

OSS

non posso definire un ramo analitico di $\operatorname{Log} z$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Se lo fosse applicherei il thm e verrebbe 0 l'integrale, ma non è zero (vale $2\pi i$)

(8) Descrivere le condizioni per cui $\int_\gamma \operatorname{Log} z\, dz = 0$ ha senso ed è vera.

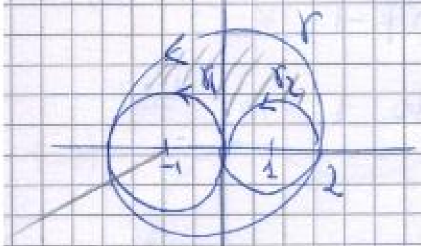
(la primitiva (se z fosse reale) $z(\operatorname{Log} z - 1)$)

è vera se $\gamma \subseteq \Omega \setminus S_\theta$, $S_\theta = \{ te^{i\theta}\ t \geq 0 \}$

$$= \int_\gamma \big(z(\underbrace{\operatorname{Log} z}_{\lambda_\theta(z)} - 1)\big)'\, dz$$

(3) Calcolare $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz = 0$

da dim



$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2-1}$$

capire che è vero.

e capire perche $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \pi i$

e $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+1} = -\pi i$

ES

Triangoli def

n-simplesso in $\mathbb{R}^n$, dati $z_0, z_1, \dots, z_n$

$$\sigma(z_0, \dots z_n) = \left\{ t_0 z_0 + \dots + t_n z_n \;\middle|\; t_i \geq 0, \sum t_j = 1 \right\}$$

$\rightsquigarrow$ TRIANGOLO è $T(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}$

$$:= \left\{ z_1 t_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \;\middle|\; \begin{matrix} t_i \geq 0 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{matrix} \right\}$$

dimostrare che

- $T(z_1, z_2, z_3)$ è il più piccolo insieme convesso che contiene z_i (ed è chiuso)
- e Calcolare $\operatorname{diam} T = \sup_{z, w \in T} |z - w|$ (o dare una stima $\operatorname{diam} T \leq \text{perimetro}(T) = |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$)
- e calcolare $\text{Area}(T)$