Lezione 27/05/19

Esame 11/04/2001

(1) f analitica in $|z|<1$ tc $|f(z)|<1$. Se f ha uno zero di ordine e $|f(z)| \neq |z|^m$

$\longrightarrow |f(z)| < |z|^m \quad \forall |z|<1$

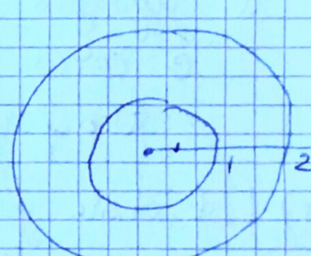
Svol

segue da Schwarz con $F(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ come nel lemma di Schwarz

(2) Trovare il # radici di $P(z) = z^4 + z^3 - 4z + 1$ in $1<|z|<2$

Svol

voglio applicare thm di Rouché



- su $|z|=1$ $\quad f(z) = -4z+1$

$\rightsquigarrow |P-f| \leq |z^4+z^3| \underset{|z|=1}{=} 2 \lneq 3 \leq |4z-1|$

siccome f ha uno zero nel disco unitario $z=\frac{1}{4}$ $\Longrightarrow$ P ha uno zero in $|z|<1$

- su $|z|=2$

$|z^4 - 4z + 1| > 8 \quad \rightsquigarrow f = z^4 - 4z + 1$

$|P-f| = |z^3| = 8 < |z^4 - 4z + 1| = |f|$

$\rightsquigarrow$ # radici di f in $|z|=2$ = $\#\{P=0\}$

riapplico il thm con $f = z^4 - 4z + 1 = f$

in $|z|=2$ prendo $f_1 = z^4 \rightsquigarrow |f - z| < |z^4| = |f_1|$

ho 4 radici $\{\#\text{radici di } f_1\} = \{\#\text{radici di } f_1 = f\} = \{\#\text{radici di } P\}$

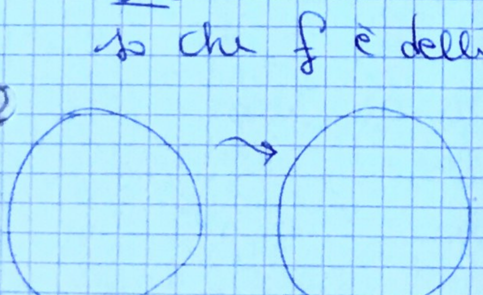
$\Longrightarrow$ nell'anello 3 radici

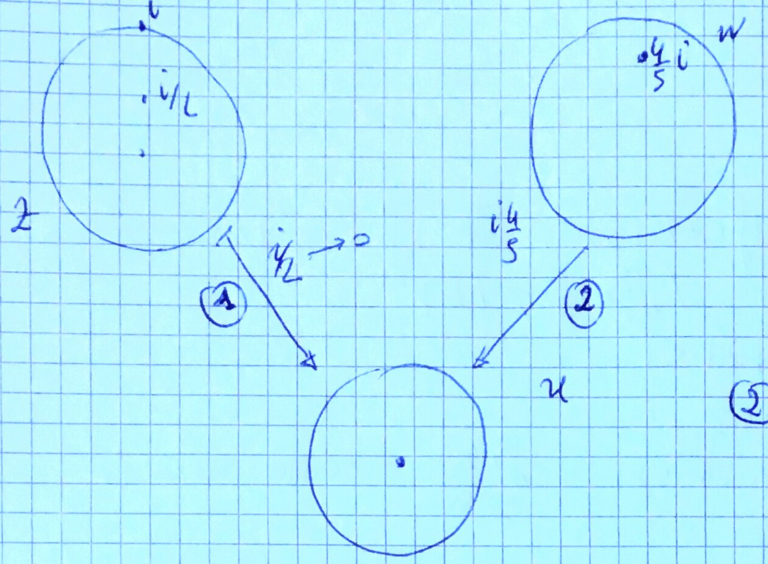
(3) Trovare la trasf conforme f di $D = \{|z|<1\}$ con $f(i) = i$

$f\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4}{5}i$

Svol

so che f è della forma $f(z) = c\,\frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1}$ con $|c|=1$, $z_0 \in D$





① $c\,\dfrac{z-\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}z}$ + $i \longrightarrow i$

⇝ $c=1$

$\Longrightarrow$ ① $= \dfrac{2z-i}{2+iz}$

② $c\,\dfrac{w-\frac{4}{5}i}{1+w\frac{4}{5}i}$ + $i \longrightarrow i$

⇝ $c=1$

$\Longrightarrow$ ② $= \dfrac{5w-4i}{5-4wi}$

le uguaglio
e cerco w = . . . che è la
trasformazione che mi interessa

(4) Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-1|^4}$$

$z = 2e^{it}$ $\qquad dz = 2i\,e^{it}\,dt = z\,i\,dt$

$|dz| = 2dt$ $\qquad\Updownarrow$

$2dt = \dfrac{2\,dz}{iz}$

⇝ $|dz| = \dfrac{2}{iz}dz$

$$\int_{|z|=2} \frac{2}{iz}dz\,\frac{1}{\left((z-1)\left(\frac{4}{z}-1\right)\right)^2} =$$

$|z-1|^4 = \left((z-1)\left(\frac{4}{z}-1\right)\right)^2$

$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=2} \frac{z}{\left((z-1)(4-z)\right)^2}dz \quad ; \quad f(z)=\frac{z}{(4-z)^2} \text{ è analitica in } |z|<2$$

formula Cauchy

$$= 4\pi\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = 4\pi f'(1) = 4\pi\,\frac{5}{27}$$

Esonero 3/06/2010

(1) Serie di Taylor in $z=0$ e il raggio di convergenza

calcolare la di $\frac{1}{(z^2+1)^2}$

Svol

il R di conv è 1 essendo i la prima sing di f (rispetto al ~~raggio~~ centro di esp) distanza

- $$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \left(\frac{1}{1-(-z^2)}\right)^2$$

2 serie assolutamente conv.

$$= \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n}\right)^2 \overset{\downarrow}{=} \sum_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 0}} (-1)^{n+m} z^{2(n+m)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}} 1 = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (k+1) z^{2k}$$

- $$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \left(\frac{1}{1+z^2}\right)' \frac{1}{2z} = -\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n}\right)' \frac{1}{2z} =$$

$$\frac{1}{2z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n z = \sum (-1)^k (k+1) z^{2k}$$

ho cancellato

(3) (a) Sviluppare in serie di Laurent in $\{0<|z|<\infty\}$

$f = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

Svol

$$f = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$

devo individuare parte sing e parte regolare

$$= z^3 \left(\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3}\right) + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{k-3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)} \frac{1}{z^k}$$

(b) Trovare l'anello massimale su cui converge $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} + \sum_{n<0} \frac{z^n}{3^n+1}$$

il raggio di con della prima : $\left(\overline{\lim}\left(\frac{1}{3^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 3$

il raggio di con della seconda

$$\left(\overline{\lim}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1$$

$\rightsquigarrow R : \{1 < |z| < 3\}$

Lezione