

Lezione 22/04/19

Teorema [Principio dell'argomento]

Sia $f \neq 0$, analitica su un disco D ; $\{z_j\}$ gli zeri (con molteplicità) di f in D . Sia γ una curva chiusa in D ; $z_j \notin \gamma \forall j$.

Allora
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_j n(\gamma, z_j)$$

Corollario [Teorema di Rouché]

Siano f, g funzioni analitiche su un disco D e γ una curva chiusa in D . Siano $\{z_j\}, \{w_k\}$ gli zeri (con molteplicità) rispettivamente di f e g , e $|f(z) - g(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma$.

Allora
$$\sum_j n(\gamma, z_j) = \sum_k n(\gamma, w_k)$$

dim

NB se f non ha zeri $\sum n(\gamma, z_j) = 0$

z_j e $w_k \notin \gamma \forall j, k$

altrimenti $|g(z)| < 0$ assurdo (se $f(z) = 0 \Rightarrow \ln r$)
 o $|f(z)| < |f(z)|$ (se $g(z) = 0 \Rightarrow \ln r$)

da $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ siccome f non si annulla ottengo

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$$
. Sia $F(z) := \frac{g(z)}{f(z)}$ e $\Gamma = F(\gamma)$

$\rightarrow \Gamma \subseteq B_1(1) \neq 0$ nr $n(\Gamma, 0) = 0$ • è costante sulle componenti connesse
 ma $n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt \cdot \frac{1}{2\pi i} =$ • è nullo sulle componenti allungate

$\gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'}{g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} =$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{g'f - fg'}{f^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

$$= \sum_j n(\gamma, z_j) - \sum_k n(\gamma, w_k)$$

cvd

Esercizio

(1) Quante radici ha il polinomio $P = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ in $B_1(0)$.

Sol

vorrei applicare il Corollario di Rouché $\leadsto$ cerco una f (es un monomio, di cui so calcolare facilmente gli zeri) tale
 $|P - f| < |f|$ su $|z| = 1$

il termine più grande, se $|z| \leq 1$ è $6z^3 \rightarrow f(z) = 6z^3$

se $|z| = 1$ $|P - f| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq 5 < 6 = |f|$ ok

ora, $\gamma = \partial B_1(0)$ (con orientamento positivo) $= \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$

e come $D = B_{1+\varepsilon}(0)$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

per avere D posto prendiamo
 molto ε

ta in $1 \leq |z| \leq 1 + \varepsilon$ non ci sono
 radici di P

$$n(r, z) = \begin{cases} 1 & z \in B_1(0), |z| < 1 \\ 0 & z \notin \overline{B_1(0)}, |z| > 1 \end{cases}$$

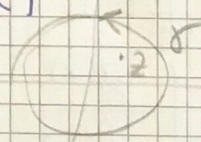
$z \in B_1(0), |z| < 1$

$z \notin \overline{B_1(0)}, |z| > 1$

$$n(-r, z) = \begin{cases} -1 & z \in B_1(0), |z| < 1 \\ 0 & z \notin B_1(0) \end{cases}$$

$z \in B_1(0), |z| < 1$

$z \notin B_1(0)$



$$* \sum_{j=1}^3 n(r, 0) = 1 + 1 + 1$$

$$n(r, z) = n(r, 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dt = 1$$

$$* \gamma = e^{it}$$

$\rightarrow$ il numero di radici di P con molteplicità sono 3

($f(z) = 6z^3$ ha 3 radici in $B_1(0)$
 $(z_0 = 0$ con molteplicità $= 3)$)

Un lemma sul calcolo dell'indice [Lemma 2 p116]

generalmente: $z_+ \in \gamma$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$\gamma_1 = \gamma(z_-, z_+)$, $\gamma_2 = \gamma(z_+, z_-)$

$\gamma(t) \in [t_0, t_+]$ $\gamma(t) \in [t_+, t_1]$

con $\gamma = \{ \gamma(t) \in [t_0, t_1], \gamma(t_0) = z_-$

→ Sia γ una curva chiusa

$z_0 \notin \gamma$, π una retta

orientata che passa per z_0 e siano z_+ e z_- due punti di γ e nelle componenti diverse individuate da π e sia

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ con $\gamma_1 = \gamma(z_-, z_+)$

$\gamma_2 = \gamma(z_+, z_-)$

Assumiamo che $\gamma_1 \cap \pi = \emptyset$
 $\gamma_2 \cap \pi = \emptyset$

→ Allora $n(\gamma, z_0) = 1$

si "attorciglia" una volta attorno a z_0

CSS

L'indice è invariante per
rototraslazioni

(più in generale: per cambiamenti di coordinate lineari)

$az + b \quad a \neq 0$

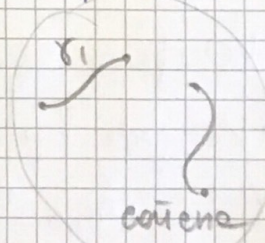
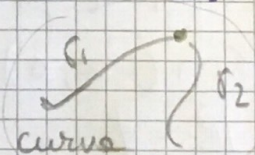
ATTENZIONE 

$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ con $\gamma_1 = \{ \gamma_1(t) : t \in [a, b_1] \}$ con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_1)$

$\gamma_2 = \{ \gamma_2(t) : t \in [b_1, b_2] \}$

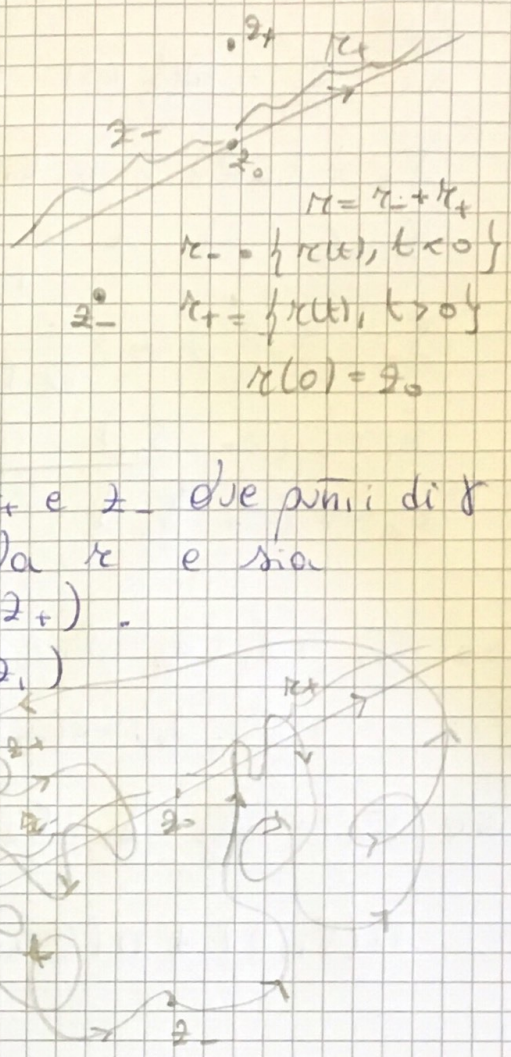
ma $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b_1] \\ \gamma_2(t) & t \in [b_1, b_2] \end{cases}$

DIVERSO da $\gamma_1 + \gamma_2$ con $\gamma_i = \gamma_i(t)$



$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ds}{s - (az_0 + b)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{a dz}{(a(z_0 + b) - (az_0 + b))}$$

→ possiamo assumere per l'osservazione
 $z_0 = 0$
e $\gamma(t) = \{ t, t \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$
la retta



$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

data

sia $C = \partial B_\epsilon(0)$ e $\overline{B_\epsilon(0)} \cap \gamma = \emptyset$

$$s_+ = t_+ z_+, \quad 0 < t_+ < 1$$

$$s_+ \in C \quad \text{e} \quad t_+ = \frac{\epsilon}{|z_+|}$$

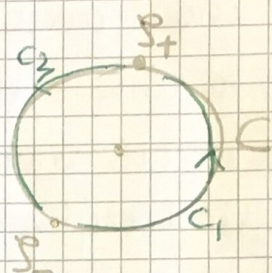
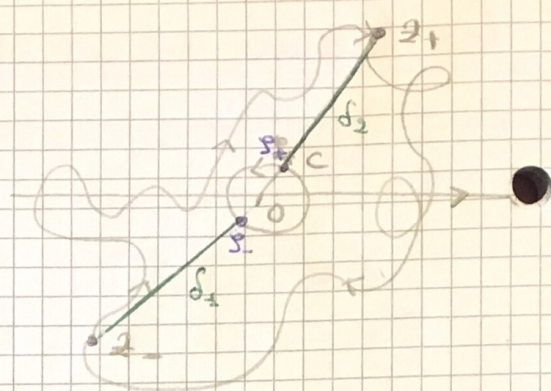
$$s_- = t_- z_-, \quad t_- = \frac{\epsilon}{|z_-|}$$

$$\delta_1 = \sigma(z_-, s_-)$$

$$\delta_2 = \sigma(z_+, s_+)$$

$$C_2 = C(s_+, s_-)$$

$$C_1 = C(s_-, s_+)$$



sia $\sigma_1 := \delta_1 + \delta_2 - C_1 - \delta_1 =$

$$= \sigma(z_-, z_+) + \sigma(z_+, s_+) - C_1 - \delta_1 \Rightarrow \text{è una curva chiusa}$$

sia $\sigma_2 := \delta_2 + \delta_1 - C_2 - \delta_2 \Rightarrow$ analogamente è una curva chiusa

$$\begin{aligned} n(\sigma_1, 0) + n(\sigma_2, 0) &= n(\delta_1) + n(\delta_2) - n(C_1) - n(\delta_1) + \\ &\quad + n(\delta_2) + n(\delta_1) - n(C_2) - n(\delta_2) = \\ &= n(\gamma) - n(C) \end{aligned}$$

$$\rightarrow n(\gamma) = \underbrace{n(C)}_1 + n(\sigma_1) + n(\sigma_2)$$

Affermo che $\begin{cases} \sigma_1 \cap (-\infty, 0] = \emptyset \\ \sigma_2 \cap [0, \infty) = \emptyset \end{cases}$

$\Rightarrow 0$ è componente connessa illimitata di σ .

Verifico che $\sigma_1 \cap (-\infty, 0] = \emptyset$:

• So per hp $\gamma \cap (-\infty, 0] = \emptyset$

• $\delta_{1,2} \cap \mathbb{R} = \emptyset \quad \left(\begin{array}{l} \forall u \delta_1(u) > 0 \\ \forall u \delta_2(u) < 0 \end{array} \right)$

• $C_1 \cap \mathbb{R} = \emptyset \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{es} \\ e^{it} = \cos t + i \sin t \quad t \in [t_0, t_0 + 2\pi] \end{array} \right.$

e $\sigma_2 \rightarrow n(\sigma_1) = 0 = n(\sigma_2)$ e finisce.

(ND)