Lezione ~~15/10/2010~~ 29/05/2019

(1) Esame 15/1 /2010

(1)(a) Trovare parte reale e Imm di $\cos z$

Svol $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$

$= \cos x \cosh y - \sin x \dfrac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i} =$

$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

(b) Determinare l'insieme i^{2i}

$i^{2i} = e^{2i \log i} = e^{-2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\pi} e^{4k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

tutti i log di i (in senso insiemistico)

$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbb{Z}\right)$

$i^{2i} = \left\{ e^{-\pi} e^{4k\pi}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) Trovare il più generale polinomio omogeneo di 2 variabili di secondo grado armonico. Determinare le funzioni coniugate.

Svol

il più generale di grado 2 $\quad u : ax^2 + by^2 + cxy$

armonico $\longrightarrow \Delta u = 0 \implies \Delta u = 2a + 2b = 0 \iff a = -b$

$\rightsquigarrow u = a(x^2 - y^2) + cxy$

la f coniugata la cerco con C-R. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$\begin{cases} u_y = -2ay + cx = -v_x \\ u_x = 2ax + cy = v_y \end{cases}$

integro $\quad v_x = 2ay - cx \to v = 2axy - c\dfrac{x^2}{2} + v_0(y)$

$\partial_y \downarrow$

$2ax + cy = v_y = 2ax - v_0'$

$\to v_0 = \dfrac{c}{2} y^2 + d$

$\longrightarrow v = 2axy - \dfrac{c y^2}{2} + d - \dfrac{c x^2}{2}$

$= 2axy - \dfrac{c}{2}(x^2 - y^2) + d$

e $f(x,y) = u+iv$

$= a(x^2-y^2)+cxy+i\left(2axy-\frac{c}{2}(x^2-y^2)+d\right)$

$=\left(a-\frac{ic}{2}\right)(x^2-y^2)+(c+2ia)xy+id+2i\left(a-i\frac{c}{2}\right)xy+id$

$= A(x^2-y^2+2ixy)+id = Az^2+id$

$\longrightarrow f(z) = Az^2+id \qquad A\in\mathbb{C},\ d\in\mathbb{R}$

(3) $\Omega = \{\operatorname{Im} z>0\}$, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ analitica tc $f(i)=1$

e $|f^2(z)-1|<1 \quad \forall z\in\Omega \xRightarrow{\text{dim}} f(\Omega)\subseteq\{\operatorname{Re} w>0\}$

e $\operatorname{Re}(f(z))>0 \quad \forall z\in\Omega$

dim

$|f^2(z)-1|^2<1$

$|u^2-v^2+2iuv-1|^2 = (u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2<1$

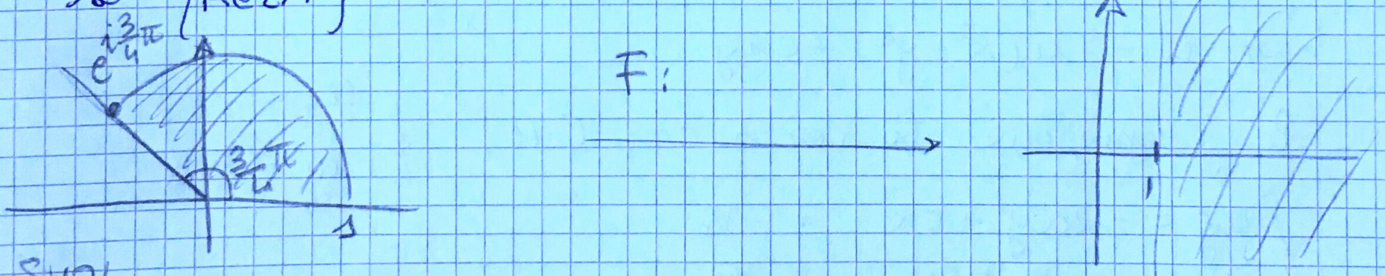
$(u^2-v^2)^2-2(u^2-v^2)+4u^2v^2<0$

$u^4+v^4-2u^2v^2-2u^2+2v^2+4u^2v^2<0$

$\leadsto 0\leq u^4+v^4+2v^2+2u^2+v^2<2u^2 \Longrightarrow u^2>0$

$\xrightarrow[f((0,1))=1]{\text{ma}} u>0$ essendo $u\in C(\Omega)$

(4) Mappare la mappa conforme di $\Omega=\{|z|<1,\ 0<\arg z<\frac{3}{4}\pi\}$ su $\{\operatorname{Re} z>1\}$



SVOL

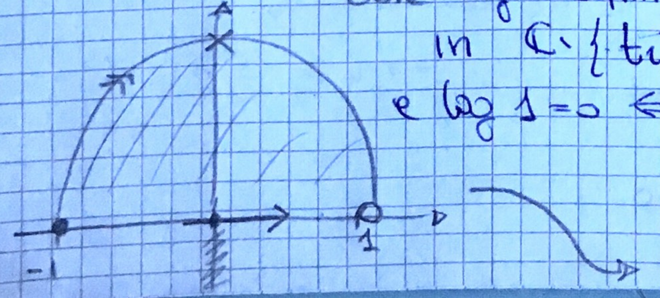
$z_1 = z^{\frac{4}{3}}$
$:= e^{\frac{4}{3}\log z}$

dove log è definito

in $\mathbb{C}\setminus\{ti \mid t<0\}$

e $\log 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\log\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$

fare attenzione alle radici

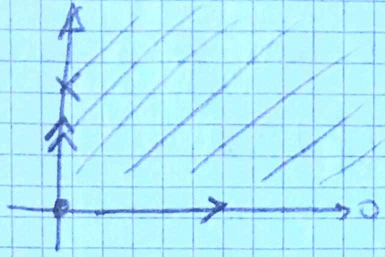


$1 \to \infty$

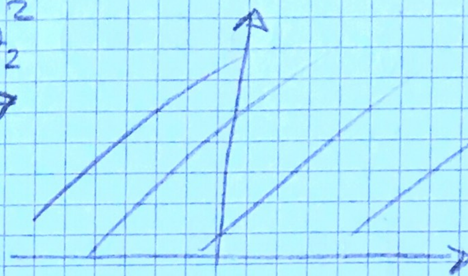
$-1 \to 0$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$z_2 = \dfrac{1+z_1}{1-z_1}$



$z_3 = z_2^2$

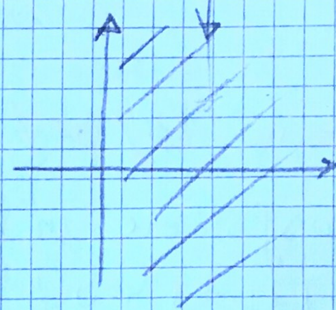


$+\infty \to -1$

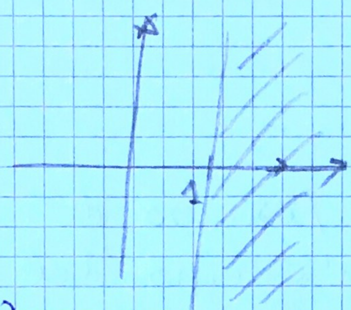
$0 \to 1$ così ho l'orientamento

$(-1,1) \to (0,+\infty)$

$z_4 = -z_3 i$



$z_5 = z_4 + 1$



(5) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} = 0$; $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} =$ con la formula di Cauchy o anche con la serie di Laurent

$\dfrac{\sin z}{z^2} = \dfrac{1}{z} + (\text{ }i y)$ analitica

$\longrightarrow \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} = 2\pi i$ $\left(\displaystyle\oint_{|z|=1} z^n \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \right)$

(6) Discutere le singolarità di $\dfrac{\cos z}{\sin z - 1}$

$\sin z = 1 \overset{\text{in } \mathbb{C}}{\iff} z_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

da dire che gli unici zeri sono reali (vedere bene la discussione)

dire che sono tutti e soli quei punti.

$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y = 1$

$\rightsquigarrow \cos x \sinh y = 0 \iff y \neq 0 ; \cos x = 0$ e $*$

$\sin x \cosh y = 1 \iff y = 0 ; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$*$ e $\sin x \cosh y = 1$ mai.

$\longrightarrow \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi + w\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + w + 2k\pi\right) - 1} = \dfrac{\cos(z_k + w)}{\sin(z_k + w) - 1} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + w\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + w\right) - 1} =$

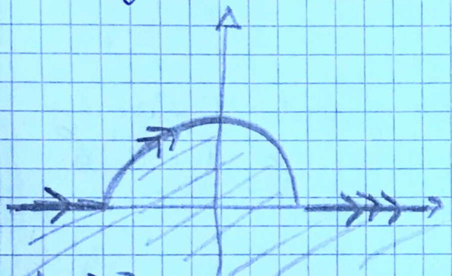
$= \dfrac{-\sin w}{\cos w - 1} = \dfrac{\sin w}{1 - \cos w} \overset{\text{sviluppo in serie}}{=} \dfrac{w - \frac{w^3}{6} + \dots}{\frac{w^2}{2} + O(w^4)} =$

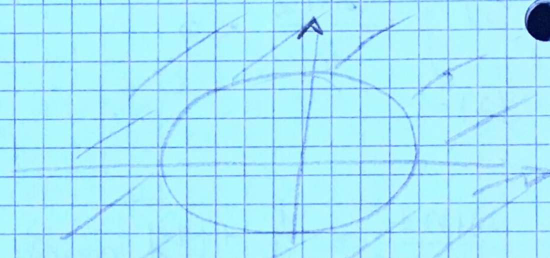
$\frac{2}{w}\left(1+O(w^2)\right)$ ⇝ z_k è un polo semplice e $\mathrm{Res}_{z_k}(f)=2$ $\forall k$

[$f(z_0+z)$ z_0 sing. di f. studio f in un intorno di z_0)
mi riedo sulle singolarità, faccio il cambio di variabile e vedo la serie come si comporta
sviluppo di Mc.

Esame 13/07/2010

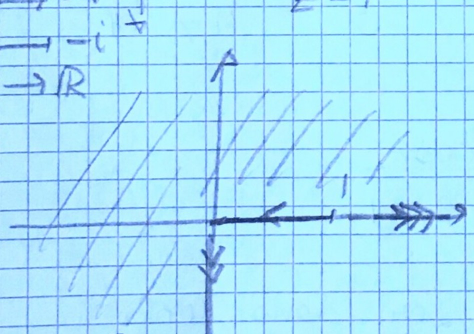
(1) Trasformare in modo conforme l'esterno di $\{|z|\le 1\}\cup\{\mathrm{Im}\, z\le 0\}$ sull'esterno del disco $\{|z|<1\}$



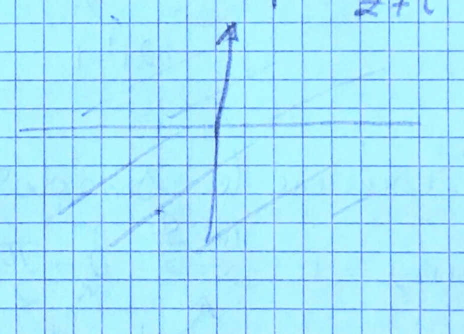


$-1\to 0$
$1\to\infty$
$0\to -1$
$i\to -i$
$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$z_1=\frac{z+1}{z-1}$



$z_2=z^{\frac{2}{3}}$



$\frac{z-i}{z+i}$

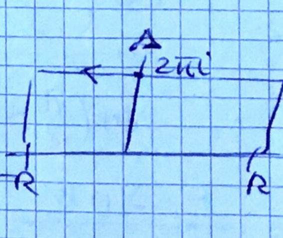
(2) Trovare # di radici di $\underbrace{z^8-4z^5+z^2-1}_{P}=0$ in $|z|<1$

$f=-4z^5-1$

$|P-f| = |z^8+z^2|\le 2<3\le|f(z)|$

(3) Integrali: (i) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}$

(i) si può calcolare per esempio su



ma anche calcolando la ~~der~~ primitiva

$$\int \frac{e^{x/2}}{e^x+1} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} D \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

(6) Sviluppare in serie fino ad ordine 6 (calcolare il polinomio di MacLaurin) di $\operatorname{Log} \frac{\sin z}{z}$

Svol

prendo il ramo principale del log, altrimenti (non è serie f analitica) cambierebbe il primo termine di $\operatorname{Log}(1+z)$ $(\operatorname{Log}(1)=0)$

$\operatorname{Log} \frac{\sin z}{z}$:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + O(z^9)\right)$$

$$= 1 \underbrace{- \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!}}_{W} + O(z^8)$$

$$-\operatorname{Log}(1-w) = \sum_{k\geq 1} \frac{w^k}{k} = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots + \frac{w^6}{6} + \dots$$

chiamo

$$w := \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!}$$

$$\dots = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + O(w^4)$$

$$w^2 = \frac{z^4}{36} - \frac{z^6}{3\cdot 5!} + O(z^8)$$

$$w^3 = \frac{z^6}{6^3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log} \frac{\sin z}{z} = -\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{180} - \frac{z^6}{2835} + O(z^8)$$