Lezione 3/4/19

Thm di Cauchy

$f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, Ω convesso, $z_j \in \Omega$

analitica e z_j singolarità eliminabili $\left(\lim_{z \to z_j} f(z)(z - z_j) = 0 \right)$

Allora $\forall \gamma$ chiusa in Ω', $\int_\gamma f \, dz = 0$

Formula di Cauchy

Stesse ipotesi con $\forall z \in \Omega'$

Allora $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z)$

$\xi \in \Omega' \setminus \{z\} \longrightarrow \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ in z ha una sing eliminabile e anche in z_j

Lemma 1

$f \in C([a,b] \times \Omega, \mathbb{C})$, $\forall t \in [a,b]$, $z \in \Omega \longmapsto f(t,z)$ è analitica

Allora $F(z) := \int_a^b f(t,z) \, dt$ è analitica in Ω e $F'(z) = \int_a^b f_z(t,z) \, dt$

dim (es.) faccio rapporto incrementale

$$\frac{f(t,z+h) - f(t,z)}{h} = \frac{\cancel{h} \int_0^1 f'(t, z+sh) \, ds}{\cancel{h}}$$

$z(s) = z + sh$ $s \in [0,1]$

$z' = h$

Analogamente

$f \in C(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{C})$, $z_2 \in \Omega_2 \longmapsto f(z_1, z_2)$ analitica

$F(z) := \int_\gamma f(z_1, z)\, dz_1 \longrightarrow F'(z) := \int_\gamma f_{z_2}(z_1, z)\, dz_1$

Lemma 2

Sia $f_n \in C(\Omega, \mathbb{C})$, supponiamo $\sup_\Omega |f_n| \leq M_n$ e $\sum_n M_n < \infty$
$\hookrightarrow$ conv totale

Allora $\forall\, \gamma \subseteq \Omega$, $\int_\gamma \sum_n f_n = \sum_n \int_\gamma f_n$

dim (es.)

Lemma 3 (falso in $\mathbb{R}$)

Se f analitica su $\Omega \setminus \{z_0\}$, (z_0 una singolarità isolata)

z_0 è una singolarità eliminabile $\Leftrightarrow \exists$ estensione analitica di f su Ω

dim

$\Leftarrow$) estensione è analitica, ~~continua~~ in z_0 $\rightarrow$ continua in z_0) ovvia

$\Rightarrow$) Sia $\rho > 0$: $B_\rho(z_0) \subseteq \Omega$

è analitica per $z \in B_\rho(z_0)$

Sia $F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \xrightarrow{\text{Lemma 1}} F(z)$ è analitica in $B_\rho(z_0)$

definiamo l'estensione $\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{in } \Omega \setminus B_{\rho/2}(z_0) \\ F(z) & \text{in } B_{\rho/2}(z_0) \end{cases}$ e $\tilde{f} = f$ su $\Omega \setminus \{z_0\}$

Infatti per la formula di C
$F = f$ su $B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$

In altri termini $\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{su } \Omega \setminus \{z_0\} \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \end{cases}$ il limite è questo.

non ha nessun problema in z_0

CVD

OSSERVAZIONE

Lemma 3 non ha corrispettivi in $\mathbb{R}$.

~~des~~ esempio

$f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ t.c. $\lim_{x \to 0} f(x)(x) = 0$ ma $\nexists$ estensione continua su $\mathbb{R}$ $\left(f(x) = \sin \frac{1}{x} \right)$

Teorema 1

f analitica su $\Omega \longleftrightarrow f'$ analitica su Ω (C^1 e C^∞ sono la "stessa cosa")

Ω può essere qualsiasi

dim

$z_0 \in \Omega$. Sia $\rho > 0$ t.c. $\overline{B_\rho(z_0)} \subseteq \Omega$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow} f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$\forall z \in B_\rho(z_0)$ è la derivata è questa

CVD

OSS

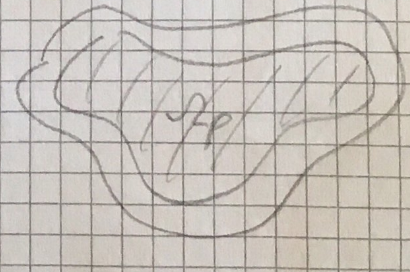
Iterando $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in B_\rho(z_0)$$

Teorema [Stime di Cauchy]

f analitica su Ω, $\rho > 0$.

Allora (1) $$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \left(\underset{\partial B_\rho(z_0)}{\overset{\max}{\sup}} |f| \right) \cdot \rho^{-n}$$

e (2) $$\sup_{\Omega_\rho} \left| \frac{f^{(n)}}{n!} \right| \leq \left(\sup_{\Omega} |f| \right) \frac{1}{\rho^n}$$ dove $\Omega_\rho := \{ z_0 \in \Omega \mid \overline{B_\rho(z_0)} \subseteq \Omega \}$



dim

(2) deriva direttamente da (1)

(1). $$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{it})}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)t}}\rho e^{it}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left(\sup_{\partial B_\rho(z_0)} |f|\right)\frac{1}{\rho^n}$$

CVD.

es
Trovare una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \geq n^n$

Corollario 1 [Teorema di Liouville]

f è intera e limitata $\Rightarrow$ è costante

dim

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $f'(z_0) \underset{C}{\overset{\text{stima}}{\leq}} \frac{M}{\rho}$ $\leftarrow M = \sup_{\mathbb{C}} |f|$ (f limitata)

ma ρ arbitrario $\rightarrow$ ~~banca~~ C_0 mando a ∞

$\longrightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\longrightarrow f \equiv$ cost.

CVD.

Corollario 2 [T.F.A]

Polinomio P a coefficienti complessi non costante ha una radice in $\mathbb{C}$.

dim

P.A. se $P \neq 0$ in $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{P}$ è una funzione intera

e poiché $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P} = 0$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{P}$ è limitata su $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ Per Liouville $\frac{1}{P} \equiv$ cost $\neq 0$. assurdo.

CVD.

Teorema 2 [formula e serie di Taylor]

f analitica in Ω, $z_0 \in \Omega$.

(i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con $\left(\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \geq d := dist(z_0, \partial\Omega)$

R

e $a_n := \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $\rightarrow P_k(z;z_0) = \sum_{j=0}^{k} \dfrac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j$

(ii) $f(z) = P_{n-1}(z; z_0) + f_n(z)(z-z_0)^n$

con $f_n(z)$ analitica su Ω

e inoltre se $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$, $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta$

(In particolare $f_n(z_0) = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$)

dim

(i) Sia $\rho > 0$ t.c. $\overline{B_\rho(z_0)} \subseteq \Omega$ $\rightarrow f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =$

$C = \{|\zeta - z_0| = \rho\}$ orientato positivamente

$z \in B_\rho(z_0)$ Sia $d > \rho > 0$ con $d := dist(z_0, \partial\Omega)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta$$

$\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$ essendo $z \in B_\rho(z_0)$ e $|\zeta - z_0| = \rho$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} f(\zeta)\, d\zeta =$$

Lemma 2

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

$\left(d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i} d\zeta\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{ok}$$

$$\left(\max_{\partial B_\rho} |f|\right) \sum \frac{|z-z_0|^k}{\rho^{k+1}} = \frac{\left(\max_{\partial B_\rho} |f|\right)}{\rho} \frac{1}{1 - \frac{|z-z_0|}{\rho}}$$

e dal thm di W segue che $\left(\overline{\lim} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} \geq d$

OSS

da (i) segue che $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq d^{-1}$

$\forall M > d^{-1} \; \exists N \mid |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M \quad \forall n \geq N \Longrightarrow \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq M^n$

(ii)

(per induzione su n) $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$

$f(z) = P_{n-1}(z; z_0) + f_n(z)(z-z_0)^n$ $\qquad f_n$ analitica su Ω e $f_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

se $n=1$ $\quad f(z) = f(z_0) + f_1(z_0)(z-z_0)$

se $f_1(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \; z \in \Omega \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$

$\xrightarrow{OSS}$ f_1 è analitica (z₀ è sing eliminabile)

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ è analitica con

e $f'(z_0)$ ne è il limite

n definiamo $f_n(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} - \frac{P_{n-1}(z; z_0)}{(z-z_0)^n}$ $\qquad$ integro sulla palletta e voglio $\int A = 0$

$C = \{ |\xi - z_0| = \rho \}$, $z \neq z_0$, $|z-z_0| < \rho$

$$\int_C \frac{P_{n-1}(\xi)}{(\xi-z_0)^n(\xi - z)} d\xi = \sum_{m=1}^{n} c_m \int_C \frac{d\xi}{(\xi-z_0)^m} \frac{1}{(\xi-z)} \overset{*}{=} 0$$

ES 3

$$\overset{*}{\int}_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{d\xi}{(\xi-z_0)^m(\xi-z)} = 0$$

cvd.