Lezione 3/05/19

PdM = Principio del Massimo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$$

γ cerchio
$\xi = \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$

$z_0 = z$
$d\xi = rie^{i\theta} d\theta$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\, d\theta$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

dim ALTERNATIVA del PdM

suppongo z_0 pto di max

$$\underbrace{|f(z_0)|}_{\max\ = M} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\underbrace{f(z_0 + re^{i\theta})}_{\leq M}|\, d\theta < M$$

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$\longrightarrow$ $|f|$ è costante in un intorno

f è costante in un intorno e quindi è costante nel dominio Ω

cvd

Lemma di Schwarz

Sia $f(z)$ analitica in $|z| < 1$ e $|f(z)| \leq 1$ con $f(0) = 0$

Allora $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$

Inoltre se $|f(z)| = |z|$ per un certo $z \neq 0$
oppure $|f'(0)| = 1$ allora $f(z) = zc$ con $|c| = 1$

dim

sia $f_1(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$; $f_1(z)$ è analitica (per thm sulle sing eliminabili)

sul cerchio $|z| = r < 1$, $|f_1(z)| \leq \frac{1}{r}$ $\forall |z| \leq r$

per il principio del max (il max sta sul bordo)

se $r \longmapsto 1$, $\underbrace{|f_1(z)|}_{= \frac{|f(z)|}{|z|}} \leq 1$ $\forall |z| < 1$

e se $|f(z)| = |z| \longrightarrow |f_1(z)| = 1 \xrightarrow{PdM} |f_1(z)| \equiv 1 \longrightarrow f_1(z) = c$

analogo per l'altra hp.

cvd

Caratterizzare le mappe conformi dal disco al disco

Sia $|c|<1$, $\phi_c(z) = \dfrac{z-c}{1-\bar{c}z}$ una mappa conforme $D \longmapsto D$

invertibile con $D=\{|z|<1\}$ e $\phi_c^{-1} = \phi_{-c} = \dfrac{z+c}{1+\bar{c}z}$

$$\left(\phi_a(z) = \frac{z+\frac{b}{\omega}}{1+\frac{\bar{b}}{\bar{\omega}}z} = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$$

oss

ϕ_{-c} è l'inversa:

$$\phi_c \circ \phi_{-c} = \frac{\frac{z+c}{1+\bar{c}z} - c}{1-\bar{c}\,\frac{z+c}{1+\bar{c}z}} = \frac{z+c-c-|c|^2 z}{1+\bar{c}z-\bar{c}z-|c|^2} = z\,\frac{1-|c|^2}{1-|c|^2} = z$$

$$|\phi_c(z)|<1 \iff |z-c|^2 < |1-\bar{c}z|^2$$

$$\overset{*}{\iff} |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{c}z) + |c|^2 < 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{c}z) + |c|^2|z|^2$$

$$\iff |c|^2(1-|z|^2) < 1-|z|^2$$

$|c|<1$ per hp

$$\iff |z|<1$$

$* \ |a-b|^2 =$

$\to_{\phi}$ manda il disco nel disco (e anche la sua inversa)

Proposizione

Sia $f: D \longmapsto D$ conforme e invertibile $(D=\{|z|<1\})$

Allora $\exists\, a,\omega$ tc $|\omega|=1$ e $|a|<1$ tc $f(z) = \omega\,\phi_a(z)$

tutte le mappe conformi $D \mapsto D$ sono composiz di una rotazione e ϕ

dim

sia $b := f(0)$, considero $\phi_b \circ f : D \longmapsto D$ conforme e invertibile.

$\Rightarrow (\phi_b \circ f)(0) = 0$

va nel disco $\Rightarrow |\phi_b \circ f| < 1 \Rightarrow$ sono nelle hp del Lemma 1 $*$ (pag 87)

$\longrightarrow \exists\, \omega$ con $|\omega|=1$ tc $(\phi_b \circ f)(z) = \omega z$

$$f(z) = \phi_{-b}(\omega z) = \frac{\omega z + b}{1+\bar{b}\omega z} = \omega\,\frac{z+\frac{b}{\omega}}{1+\bar{b}\omega z} = \omega\,\phi_a(z), \quad a = \frac{-b}{\omega}$$

$$\left(\frac{1}{\bar{\omega}} = \omega \quad \text{perché } 1 = \omega\bar{\omega} = |\omega|\right)$$

CVD.

* Lemma 1

Sia $f: D \mapsto D$ conforme e invertibile con $f(0) = 0$

Allora $f(z) = wz$ per un certo $|w| = 1$

dim

sia $g = f^{-1}$ è conforme e $g: D \mapsto D$, posso applicare a g il L di S.

e se $|f'(0)| \leq 1 \longrightarrow |g'(0)| \leq 1$

ma $f'(0)\, g'(0) = 1 \longrightarrow |f'(0)| = |g'(0)| = 1$

sto nelle ip lemma di S $\rightarrow$ f è una rotazione

cvd

Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curve, se si "attaccano" formano una catena = somma algebrica di curve.

$$\longrightarrow \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} f\, dz = \int_{\gamma_1} f\, dz + \dots + \int_{\gamma_n} f\, dz$$

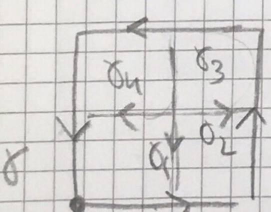
def

- Una catena è la somma algebrica di curve (anche se queste non si toccano) $\gamma_1, \dots \gamma_n$.

La catena generica è $\gamma := a_1\gamma_1 + \dots + a_n\gamma_n \quad a_i \in \mathbb{Z}$.

$$\longrightarrow \int_{\gamma} f\, dz = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\gamma_i} f\, dz$$

- un ciclo è una catena che può essere rappresentata come combinazione lineare di curve chiuse (ha diversi rappresentanti)



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

se ho una curva chiusa γ_i, si può definire $n(\gamma_i, a)$ ...

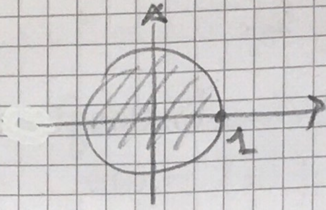
per un ciclo
l'INDICE di un CICLO

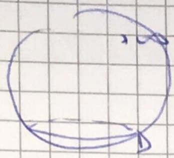
$$n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \gamma_i, a\right) := \sum_{i=1}^{m} a_i\, n(\gamma_i, a)$$

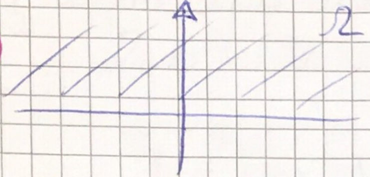
def

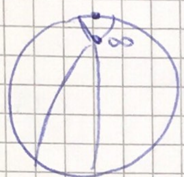
Una regione Ω è semplicemente connessa se $\Omega^c \cup \{\infty\}$ è connesso.

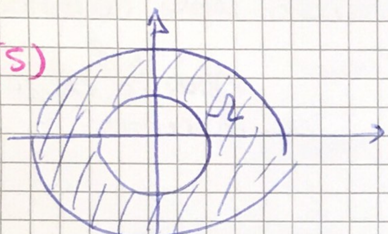
Esempi

(1) D è connesso semplicemente 

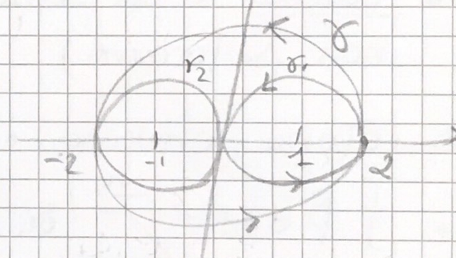
(2)  è semplicemente connesso

(3)  Ω è semplicemente connesso

(4)  nella sfera di Riemann la striscia è uno spicchio  (è semplicemente connesso)

(5)  non è semplicemente connesso

p.46 esercizio 2



$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz \overset{?}{=} \int_{\gamma_1}\frac{1}{z^2-1}\,dz + \int_{\gamma_2}\frac{1}{z^2-1}\,dz \overset{*}{=}$$

$$\| $$

$$\int_\gamma = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1}\,dz = \pi i\Big(\underset{\substack{\| \\ 1}}{n(\gamma,1)} + \underset{\substack{\| \\ 1}}{n(\gamma,-1)}\Big) = 2\pi i$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z+1} = 2\pi i$$

es [A] p.129 n.o 1

f ha ordine h in $z=a$, g ha ordine k in $z=a$

$f(z) = \tilde{f}(z)(z-a)^h$, $\tilde{f}(a)\neq 0$; $g(z) = \tilde{g}(z)(z-a)^k$, $\tilde{g}(a)\neq 0$.

$\longrightarrow f\cdot g = (\tilde{f}(z)\cdot\tilde{g}(z))(z-a)^{h+k}$ con $\tilde{f}(a)\tilde{g}(a)\neq 0$.

$\longrightarrow f(z)+g(z) = \tilde{f}(z)(z-a)^h + \tilde{g}(z)(z-a)^k$ non vera la th

controesempio: $f(z) = z + z^3$ $g(z) = -z$