Lezione 01/02/19

def

$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice analitica su Ω se $\exists$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega$$

NOTAZIONE

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$$
$$= (u(x,y), v(x,y)) \qquad z = x + iy$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow z = x + iy$ siccome $\mathbb{C}$ è un campo si può fare lim.

Come in $\mathbb{R}$, f analitica su Ω

$$\Updownarrow$$

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

come in $\mathbb{R}^n$ equivale alla differenziabilità $\left(\text{con } \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\right)$

ma qui siamo in $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$

f' è la jacobiana di $(x,y) \mapsto (u,v)$ $\quad = Lh + f(z) + o(h)$

cioè $L = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}_{2\times 2}$

se $h = h_1 + h_2 \rightsquigarrow Lh = \begin{pmatrix} u_x h_1 + u_y h_2 \\ v_x h_1 + v_y h_2 \end{pmatrix}$

$$= (u_x h_1 + u_y h_2) + i(v_x h_1 + v_y h_2)$$

inoltre $f'(z)h$

$$\lim \frac{u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y)}{h} =$$

se $\exists$ lim non dipende da come $h \to 0$

$\rightsquigarrow h = (h_1, 0)$

$$= u_x + iv_x = \frac{u_y + iv_y}{i} = v_y - iu_y$$

$h = (0, h_2)$

$$\left(\text{Cauchy-Riemann} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}\right)$$

se f analitica su Ω $\Longrightarrow$ valgono eq^{ni} di Cauchy-Riemann

<u>VICEVERSA</u> assumiamo $(x,y) \longmapsto (u,v)$ differenziabile
(succede se u, v sono ")

tc valgono C-R

allora $Lh \overset{CR}{=} (u_x h_1 - v_x h_2) + i(v_x h_1 + u_x h_2) =$

$= (u_x + i v_x)(h_1 + i h_2) \overset{\text{num complessi}}{=:} f'(z) \cdot h$

PROPOSIZIONE

$\Rightarrow$ f analitica su Ω $\Longleftrightarrow$ valgono le eq^{ni} di C-R
con $(x,y) \in \Omega \longmapsto (u,v) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ per u, v
Ω una mappa differenziabile
con $f(z) := u(z) + i v(z) =$
$= u(x,y) + i v(x,y)$

NB : Questa è una ~~relazione~~ affermazione locale

def

Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ $u: \Omega \longmapsto \mathbb{R}$
si dice ARMONICA se $\Delta u = 0$ cioè $u_{xx} + u_{yy} = 0$
(laplaciano)

Supponiamo u, v che soddisfano CR [e siano C^2]

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \xrightarrow{\text{Schw}} \Delta u = 0$$

$\longrightarrow$ stessa cosa per $\longrightarrow \Delta v = 0$

OSSERVAZIONE

funzioni per cui valgono C-R sono ARMONICHE
(determinano una coppia di armoni[che]

def

$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$

u, v si chiamano armoniche coniugate (se $u + iv$ è anali[tica]

Problema:

Data u armonica su Ω posso trovare v armonica coniuga[ta]
(tc $u + iv$ sia analitica su Ω)

NB
Ovviamente questo problema non ha soluzione unica
(se $u+iv$ è analitica, anche $u+i(v+c)$ è analitica $\forall c \in \mathbb{C}$

Richiamo di Analisi (1-forme differenziali)

$\omega = a\,dx + b\,dy \quad a,b : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \quad a,b \in C^1$

ω si dice CHIUSA se $\underset{\text{2-forma}}{a_y = b_x}$ (In qualche modo richiamano le eqn di C-R)
$\underset{\text{1-forma}}{(d\omega = 0)}$

Lemma di Poincaré
se ω è chiusa su Ω semplicemente connesso
allora $\exists\, F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ t.c. $F_x = a$, $F_y = b$
$F \in C^1$
(In altri termini: $\omega = dF$)

Data u armonica in Ω semplicemente connesso,
definiamo $\omega_u := -u_y\,dx + u_x\,dy$

dire $\rightarrow$ u armonica $\Longleftrightarrow$ ω_u chiusa $\left(\Longleftrightarrow u_{xx} = -u_{yy} \right.$
$\left. \Longleftrightarrow \Delta u = 0 \right)$

ma u armonica $\xrightarrow{\text{Poincaré}}$ $\exists\, v \in C^1(\Omega)$
t.c. $v_x = -u_y \rightarrow v_y = u_x$
che sono le C-R $\longrightarrow$ v armonica coniugata

$$\xrightarrow{\text{Poincaré}} v = \int_{z_0}^{z} \omega_u \,, \forall z_0 \in \Omega$$

(dove $\int_{z_0}^{z} \omega_u = \int_{\gamma(z_0,z)} \omega_u$ con γ una qualunque curva C^1 orientata che "va" da z_0 a z

cioè $\gamma : [0,1] \longmapsto \Omega$ di classe C^1, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$

e $\displaystyle\int_{\gamma(z_0,z)} a\,dx + b\,dy := \int_0^1 \left(a\circ\gamma\, x'(t) + b\circ\gamma \cdot y'(t) \right) dt$
$\gamma(t) = (x(t), y(t))$)

$\longrightarrow$ Risposta al problema = sì, si può fare

OSSERVAZIONE (ESERCIZIO)

f analitica su Ω. Dimostrare che f conserva l'orientamento (ossia $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \geq 0$ (se $f'(z) \neq 0 \Longrightarrow \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$)

e quindi $(x,y) \longmapsto (u,v)$ è un diffeomorfismo locale che conserva l'orientamento.

[suggerimento: calcolare $|f'(z)|^2$] (dim)

si può scrivere in 4 modi ≠

$$|f'(z)|^2 = |u_x + iv_x|^2$$

$$= v_x^2 + u_x^2 \overset{C-R}{=} u_x v_y - u_y v_x = \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

CVD

ESERCIZIO

Sia armonica $u = xy$. Trovare un'armonica coniugata (non vale la pena seguire Poinc.)

Svol

$$v_y = y \quad , \quad v_x = -x \longrightarrow v = \frac{y^2 - x^2}{2}$$

$$e \ f(z) = xy + i\frac{y^2 - x^2}{2} \overset{?}{=} cz^2 = \frac{1}{2i} z^2$$

$$= c(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2c\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + ixy\right) =$$

$$= 2ci\left(-i\frac{x^2 - y^2}{2} + xy\right) \longrightarrow c = \frac{1}{2i}$$

QED

Esempi di funzioni analitiche

Valgono le regole di derivazione di analisi 1 (regole del prodotto, rapporto, della catena ...)

se $f'(z_0) \neq 0$ f è un diffeo locale (è 1-1)

$\longrightarrow \exists$ inversa locale f^{-1} $\quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, $(f(z) = w)$

- z analitica e $(z)' = 1$
- z^n è analitica su $\mathbb{C}$ $\quad (z^n)' = nz^{n-1}$ (binomio di Newton)
- P polinomi sono f analitiche su $\mathbb{C}$
- $\frac{P}{Q}$ funzioni razionali con P, Q polinomi relativamente primi sono f analitiche su $\mathbb{C} \setminus \{$radici di $Q\}$

def

$f: \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ analitica, si dice INTERA

- e^z è analitica e intera, $(e^z)' \overset{*}{=} e^z$ $\left(e^z := \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)$

dim $*$ th add.z

$$\frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \, \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} e^z$$

$$* \quad \frac{e^h - 1}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = 1 + h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+2)!} \xrightarrow{h \to 0} 1$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+2)!} \right| \leq e^{|h|}$$

- sono analitiche $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$

ad esempio:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (\sin z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z$$

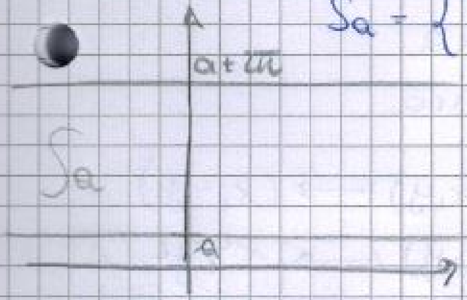
$z \longmapsto e^z$ è una funzione non iniettiva su $\mathbb{C}$ (in $\mathbb{R}$ sì)

periodica di periodo $2\pi i$

infatti $e^{2\pi i + z} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$

ma è iniettiva su una striscia del tipo

$S_a = \{ a < y < a + 2\pi, \ a \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \{ z \text{ t.c. } a < \operatorname{Im} z < 2\pi + a \}$



se $e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2}$

$$\iff \begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2} \xrightarrow{\text{iniettiva su } \mathbb{R}} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e $|y_1 - y_2| < 2\pi \iff k = 0$

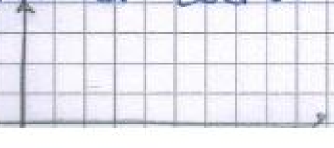
$\rightarrow y_1 = y_2$

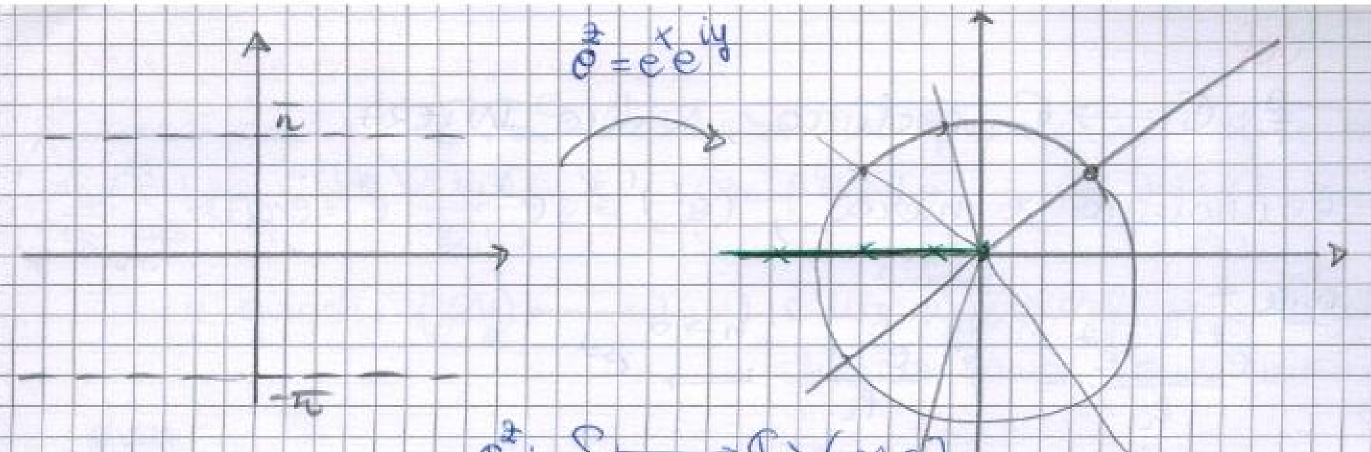
$\rightsquigarrow$ In una qualunque striscia e^z è iniettiva

def

L'inversa della funzione $z \in \{ |\operatorname{Im} z| < \pi \} \longmapsto \mathbb{C}$

si chiama RAMO PRINCIPALE di $\operatorname{LOG} \omega$





$e^z : S \longmapsto \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$\rightsquigarrow w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \operatorname{Log} w$ è analitica

(inversa di $e^z : \{|\operatorname{Im} z| < \pi\} \longmapsto \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$)

e $(\operatorname{Log} w)' = \dfrac{1}{(e^z)'} = \dfrac{1}{w}$, $e^z = w$

ESERCIZIO

(1) Sia $\lambda(w)$ l'inversa ("ramo principale del logaritmo") di $e^z : \{\operatorname{Im} \in (0, 2\pi)\} \longmapsto \mathbb{C}$

Trovare dominio di λ. Che relazione c'è tra $\operatorname{Log} w$ e $\lambda(w)$?

ATTENZIONE

$f'(z) = 0 \not\Rightarrow f$ cost. In generale falso. è vero se $f : \Omega \longmapsto \Omega$ con Ω semplicemente connesso

(2) Dimostrare che $z \longmapsto \bar{z}$ non è analitica

(3) Dimostrare che $z \longmapsto |z|^2$ non è analitica

NOTA: da $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ sono funzioni C^∞, $(x, y) \longmapsto (x, -y)$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ $(\Delta = 4)$