Lezione 06/05/19

def Ω è semplicemente connesso se $\Omega^c \cup \{\infty\}$ è connesso

def Ω è semplicemente connesso se $n(\gamma, a) = 0$ $\forall \gamma \subseteq \Omega$
$\forall a \in \Omega^c$

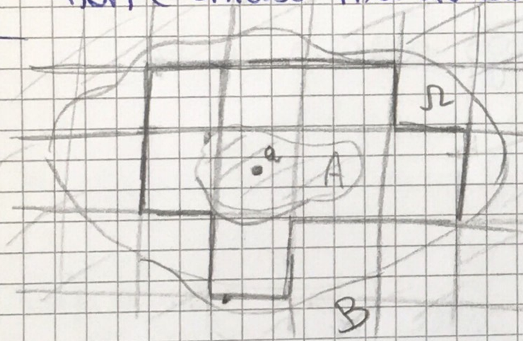
Teorema 14

Le 2 definizioni sono equivalenti $D_1 \Leftrightarrow D_2$

dim

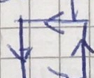
$\Rightarrow$) $\Omega^c \cup \{\infty\}$ è connesso, $a \in \Omega^c \rightarrow a \in$ alla componente connessa illimitata di $\gamma^c \rightarrow n(\gamma, a) = 0$

$\Leftarrow$) per assurdo suppongo che $\Omega^c \cup \{\infty\}$ è sconnesso. Ω è aperto $\leadsto \Omega^c$ è chiuso e $\Omega^c \cup \{\infty\}$ è chiuso $\leadsto \Omega^c \cup \{\infty\} = A \sqcup B$ (chiusi disgiunti non vuoti). Suppongo $\infty \in B \leadsto A$ è limitato
(se fosse illimitato $A \sqcup B$ = unione disgiunta di insiemi illimitati $\leadsto A \sqcup B$ non è chiuso ma avrebbe 2 pti di accumulaz) $\rightarrow$ A COMPATTO



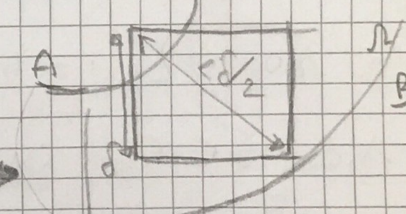
sia $\delta := dist(A, B) > 0$ $\left(= \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} |x - y| \right)$ $\overset{A \text{ compatto}}{=}$ min

(dist(A,B) > 0
se fosse $= 0 \rightarrow \exists x \in A, B$ ma A e B sono disgiunti $\lightning$)

sia $a \in A$, voglio costruire una curva $\gamma \subset \Omega$ tc $n(\gamma, a) = 1$
$\leadsto$ costruisco una griglia di quadrati Q di lato $< \frac{\delta}{\sqrt{2}}$
con a al centro di uno di questi quadrati. $\leftarrow$ chiusi
e $\partial Q =$ 

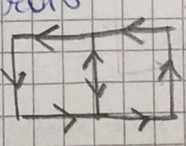
$\gamma := \sum_{\substack{j \\ Q_j \cap A = \emptyset}} \partial Q_j$ $\longrightarrow n(\gamma, a) = \sum_j n(\partial Q_j, a) =$

- se a è il centro di quel quadrato è 1 $= 1$
- se $a \notin Q_j \rightarrow n(\partial Q_j, a) = 0$



ora, $\gamma \overset{?}{\subset} \Omega$: $\gamma \cap B = \emptyset$,

- $\gamma \cap A = \emptyset$ se un punto di un quadrato ha un punto in A $\rightarrow \in$ a 2 quadrati



$\rightarrow \gamma \subset \Omega$

cvd

OSS

(1) se Ω non è s.c. $\exists\, \gamma \subset \Omega$, $\exists\, a \in \Omega^c$ t.c. $n(\gamma, a) \neq 0$

$\rightarrow f(\zeta)$ analitica in Ω $\rightarrow \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i \underbrace{n(\gamma, a)}_{\neq 0} \neq 0$

$\rightarrow$ ho trovato una funzione e una curva per cui non vale il thm di Cauchy (controesempio)

def

Un ciclo $\gamma \subset \Omega$ aperto si dice OMOLOGO A ZERO rispetto a Ω se $n(\gamma, a) = 0 \quad \forall a \in \Omega^c$ $\quad (\gamma \sim 0)$

(si può introdurre una rel di equivalenza $\sim$) ma non lo facciamo

se $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega} \longrightarrow \gamma \sim 0 \pmod{\Omega'}$ con $\Omega' \supseteq \Omega$

Formulazione generale del Teorema di Cauchy

Sia $f(z)$ analitica su Ω

allora $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall$ ciclo γ omologo a zero in Ω

(Se Ω è sc $\longrightarrow \int_\gamma f = 0$ $\forall$ ciclo in γ)

dim

- se Ω è illimitato interseco Ω con una palla * caso visto a fine dim

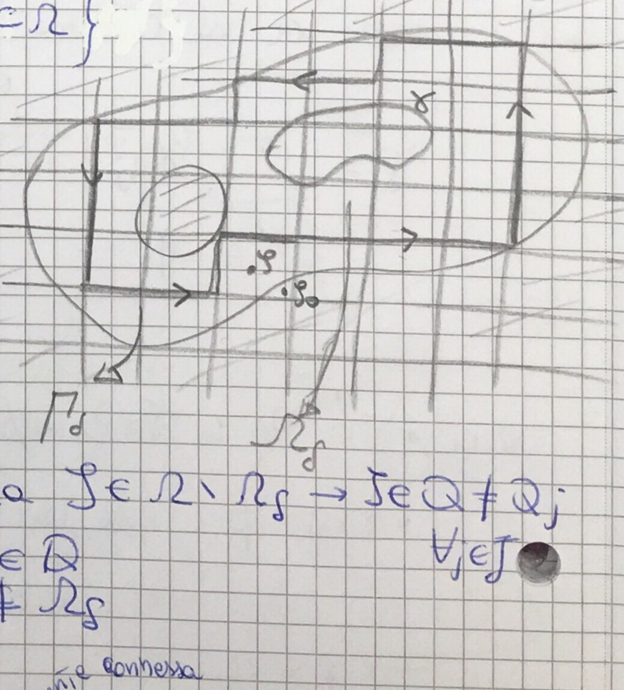
$\rightarrow$ ipotizzo Ω limitato. Dato $\delta > 0$ costruisco una griglia di quadrati chiusi di lato δ.

$Q_j \quad j \in J \quad$ con $J = \{ j \text{ t.c. } Q_j \subset \Omega \}$

J è finito perché Ω limitato

sia $\Gamma_\delta := \sum_{j \in J} \partial Q_j$

e sia $\Omega_\delta := \operatorname{int}\left(\bigcup_{j \in J} Q_j \right)$ ← è aperto



sia $\gamma \subset \Omega$ ciclo omologo a zero

se δ è suff piccolo $\rightarrow \gamma \subset \Omega_\delta$; sia $\zeta \in \Omega \setminus \Omega_\delta \rightarrow \zeta \in Q \neq Q_j \quad \forall j \in J$

$\rightarrow \exists\, \zeta_0 \notin \Omega$ ma $\zeta, \zeta_0 \in Q \longrightarrow \sigma(\zeta, \zeta_0) \in Q \notin \Omega_\delta$

$\rightarrow n(\gamma, \zeta) \overset{\text{costante sulle comp. conn.}}{=} n(\gamma, \zeta_0) = 0$ $\rightarrow \in$ componente connessa illimitata

$\leadsto n(\gamma,\zeta) \overset{*'}{=} 0 \quad \forall \zeta \in \Gamma_\delta \subset \Omega \setminus \Omega_\delta$ cioè sui punti della frontiera di Γ_δ

sia f analitica su Ω, se $z \in \operatorname{Int}(Q_{j_0})$ $\quad$ j_0 è il j fissato tc $z \in \operatorname{Int} Q_{j_0}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{se } j = j_0 \\ 0 & \text{se } j \neq j_0 \end{cases}$$

(formula di Cauchy)

perchè è analitica dato che le singolarità z non apparterrebbe al Q_j

se sommo su $j \in J$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall z \in \operatorname{Int}(Q_{j_0})$$

posso estendere questo per continuità a $\forall z \subset \Omega_\delta$ (vero anche sul bordo)

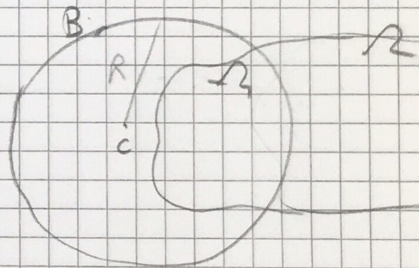
$$\to \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\, dz \qquad (\gamma \subset \Omega_\delta)$$

$\neq 0$ sempre $\zeta \neq z$

$\to$ continua in Γ_δ e γ

thm di Fubini

$$= \int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{\zeta - z}\right) f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\Gamma_\delta} n(\gamma,\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \overset{*'}{=} 0$$



$*$ se Ω illimitato, sia $|z| < R = B_R(c)$

$\leadsto \Omega' := \Omega \cap B_c(R)$ è limitato

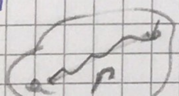
$\longrightarrow$ applico argomento di prima a Ω'

cvd.

OSS (COROLLARIO 1)

Se Ω è S.C $\longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma$ ciclo in Ω

$\int_\Gamma f$ dipende solo dagli estremi $\longrightarrow \exists\, F$ analitica tc $F' = f$



Corollario 2

Se f è analitica in Ω semp. conn. e $f(z) \neq 0$ in Ω allora è possibile definire una branca del $\log f(z)$

dim

sia $\frac{f'(z)}{f(z)}$ è analitica in $\Omega \longrightarrow \exists$ una F analitica tc $F' = \frac{f'(z)}{f(z)}$

$\longrightarrow f(z)e^{-F(z)} \equiv$ Costante $\quad f'e^{-F} - fF'e^{-F} = (f' - fF')e^{-F}$, $\;f' - fF' = 0$

$\rightarrow$ sia $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) e^{-F(z_0)} = c$

e $\log f(z) := F(z) - F(z_0) + \log f(z_0)$

$$\left(e^{F(z_0) - F(z_0) + \log f(z_0)} = f(z_0) \right)$$

cvd

osservazione

Siano Ω_1, Ω_2 due semplicemente connessi, $\Omega_1, \Omega_2 \neq \mathbb{C}$

$\exists \; f : \Omega_1 \longmapsto \Omega_2$ conforme e invertibile.