Roma, 08/03/2019

DEF: $f: \mathbb{C} \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica si dice conforme se $f' \neq 0$ su Ω. (Ω regione := aperto connesso)

PROP: Una funzione conforme iniettiva ha inversa ~~continua~~ conforme.

OSS $\mathbb{C} \ni z \xrightarrow{su} e^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un omomorf. di gruppi tra $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

$$1 = e^0 = e^{z-z} \overset{\text{thm addizione}}{=} e^z \cdot e^{-z} \iff e^{-z} = (e^z)^{-1} \mapsto e^z \neq 0 \;\forall z \in \mathbb{C}$$

Sappiamo che $D(e^z) = e^z \Rightarrow e^z$ è una mappa conforme.

Sappiamo inoltre che e^z è periodica di periodo $2\pi i$ i.e. $e^{z+2\pi i k} = e^z \cdot e^{2\pi i k} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$\to$ non possiamo applicare la proposizione

Se restringiamo l'esponenziale ad una striscia complessa di ampiezza 2π possiamo invece applicarla e invertire l'esponenziale ottenendo UN logaritmo.

Esistono un'infinità di logaritmi complessi (del tipo $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$)

DIM $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f' \neq 0 \;\forall z \in \Omega$ e f iniettiva

Sia $F := f^{-1}: f(\Omega) \longrightarrow \Omega$

OSS $f(\Omega) =: \Omega'$ è una regione. Infatti:
- f continua su Ω connesso $\to f(\Omega)$ connesso.
- Per il thm della funzione inversa TFI $|f'|^2 \overset{\in\mathbb{R}}{=} \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0 \to f(\Omega)$ è un aperto (f mappa aperta)

(RIP. TFI: $\forall w_0 \in \Omega'$, $w_0 = f(z_0)$ con $z_0 \in \Omega$ è possibile definire la funzione inversa su un dischetto $B_\rho(w_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < \rho\}$ cioè $B_\rho(w_0) \subseteq \Omega'$ e F continua su Ω' e $\operatorname{Re}F, \operatorname{Im}F \in C^1(\Omega')$)

ATTENZIONE: non vuol dire F analitica!!

$\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. consideriamo $\dfrac{F(w_0+\alpha) - F(w_0)}{\alpha}$.

Siano $F(w_0) = z_0$, $f(z_0) = w_0$, $F(w_0+\alpha) - F(w_0) = \zeta$
($\zeta \neq 0$ perché $\alpha \neq 0$ e F iniettiva)
$\to F(w_0+\alpha) = \zeta + F(w_0) = \zeta + z_0$
$w_0 + \alpha = f(\zeta + z_0) \to \alpha = f(\zeta + z_0) - w_0 = f(\zeta + z_0) - f(z_0)$

$$\frac{F(w_0+\alpha) - F(w_0)}{\alpha} = \frac{\zeta}{f(\zeta+z_0) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(\zeta+z_0) - f(z_0)}{\zeta}} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{1}{f'(z_0)}$$

OSS. $\alpha \to 0 \Rightarrow \zeta \to 0$ perché F continua e $\zeta = F(w_0+\alpha) - F(w_0)$

Quindi $F'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$ dove $f(z_0) = w_0$

□

PROP $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (Ω regione) $\quad f'=0$ su $\Omega \to f\equiv \text{cost}$.
Stessa tesi se $u=\mathrm{Re}\,f$, oppure $v=\mathrm{Im}\,f$ o $|f|$ (o $\arg f$) sono costanti.

OSS Ovviamente falso se Ω non connesso.

DIM $0=f'=u_x+iv_x \overset{C-R}{=} \left.\begin{matrix} u_x-iu_y \\ = v_y+iv_x \end{matrix}\right\} \to u_x,u_y,v_x,v_y\equiv 0$ su Ω

Quindi u e v sono costanti su σ $\forall\sigma$ segmento in Ω parallelo all'asse delle x o delle y.

$\sigma=\{(\underbrace{x_0+t(x_1-x_0),y_0}_{z(t)})\mid t\in[0,1]\}$ - $t\in[0,1]\to u\circ z(t)\in\mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ f costante su tutte le poligonali con lati paralleli agli assi cartesiani.

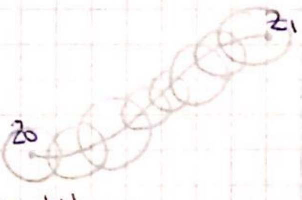
LEMMA In $\mathbb{R}^2$ un aperto connesso è connesso per "poligonali coordinate" (NON APERTO $\to$ FALSO!)

DIM Voglio far vedere che se z_0 e $z_1\in\Omega \to \exists$ poligonale coordinata che unisce z_0 e z_1 tutta in Ω.

Supponiamo che $\exists\gamma=\{z(t)\mid t\in[0,1]\}$, z continua e tc $z(0)=z_0$ e $z(1)=z_1$ e $z(t)\in\Omega$ $\forall 0\le t\le 1$.
γ compatto e Ω aperto $\overset{H-B}{\Longrightarrow}$ $\exists D_1\dots D_N$ dischi aperti ($D_k:=\{|z-w_k|<r_k\}$) $\bigcup_{k=1} D_k\supseteq\gamma$ e $D_k\subseteq\Omega$

OSS D disco aperto $z_0,z_1\in D$ $\exists$ poligonale coord a 2 lati in D che unisce z_0 e z_1
ESERCIZIO Dimostrarlo.

$\longleftarrow$ Dimostrare ciò con 3 lati è più semplice: L'idea è di considerare un diametro, costruire le proiezioni di z_0 e z_1 su di esso e le unisco.
Va comunque scritto in modo analitico.



$w_0=z_0, w_1,\dots,w_N=z_1$ punti nell'intersezione tra i dischi (ordinati secondo l'ordinamento di γ) - $w_i\in D_i\cap D_{i+1}$

Dall'oss segue il lemma. $\square$

- Se $u\equiv\text{cost}$, $\nabla v=0\to v\equiv\text{cost}$. (analogo $v\equiv\text{cost}\to u\equiv\text{cost}$)
- $|f|^2=c\ge 0 < \begin{matrix} c=0 \text{ ok} \\ c>0: |f|^2=u^2+v^2=c>0 \end{matrix}$

derivo $\to \begin{cases} uu_x+vv_x=0 \\ uu_y+vv_y=0\end{cases} \overset{C-R}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} uu_x-vu_y=0 \\ uu_y+vu_x=0\end{cases}$

$\overset{\text{Equiv}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u\end{pmatrix}=u^2+v^2>0$

$\Longrightarrow \nabla u\equiv 0$ etc. $\square$

Es 6 PAG 47 [A]: Calcola i^i.

Iniziamo definendo ciò di cui stiamo parlando: cosa è a^b con $a \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{C}$?

DEF $a^b := e^{b \log a}$ dove $\log z := \{w \mid e^w = z\}$

CONVENZIONE se $a > 0$ $\log a$ è il logaritmo reale.

trovare sol w di $e^w = z$:

$w = x + iy$, $e^x e^{iy} = z = re^{i\theta}$ ($\exists!\, \theta \in I \mid z = |z| e^{i\theta}$ con $|I| < 2\pi$ semiaperto es. $I = [0, 2\pi)$)

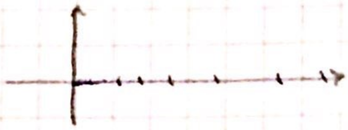
$\to e^x = |z|$ e $e^{iy} = e^{i\theta} \to y \equiv \theta \bmod 2\pi$
equiv $x \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$

$\log z = \{w = \log_{\mathbb{R}} r + i\theta + 2\pi i \mathbb{Z}\}$

$\log z = \log r + i\theta + 2\pi i \mathbb{Z}$ (insieme) con $\theta \in [0, 2\pi)$

$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2\pi i \mathbb{Z})} = e^{-\pi/2 - 2\pi \mathbb{Z}} = \{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

i^i è immagine di una successione



PROSPETTIVE $\log z$ ($z \neq 0$)

→ come insieme

→ come "rami" conformi di $\log z$ (invertendo e^z con dominio $S_a = \{z \mid a < \mathrm{Im}\, z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$

$f : S_a \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda_a := f^{-1}$

$\mathrm{Log} := \lambda_0 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow S_0$

$\lambda_\pi : \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \longrightarrow S_\pi$

quindi

$\mathrm{Im}(\log z) = \theta = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$

$\in \mathbb{T}^1 = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

(spazio quoziente)