Lezione 08/01/19

Esercizi (di [A])

p.122 **(2)** Sia f intera, e vale $|f(z)| < z^n, \exists R>0: |z|>R$

$\Longrightarrow$ f è un polinomio di grado $m \leq n$

SVOLGIMENTO

(bisogna imporre il decadimento delle derivate)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(il raggio di convergenza della serie di Taylor è almeno $d(z_0, \partial)$ $\rightarrow$ conv totalmente

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\text{e so che } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad z \in \{|\zeta - z_0| = \rho\}$$

derivo $\downarrow (k)$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

* mi interessa in 0 diviso $k!$

$\downarrow$ *

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \Longrightarrow |a_k| \leq \frac{\rho^n}{\rho^k} \xrightarrow[\rho \to \infty]{k>n} 0$$

$\rho > R$

ρ, k arbitrari ($\rho > R_k$)

ossia $a_k = 0 \ \forall k > n$

$\Longrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n$ è un polinomio di al più n.

SVOLGIMENTO (alternativo usando la formula di Taylor)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k (z - z_0)^k + g_m(z)(z - z_0)^m \qquad g_m \text{ intera}$$

$$\text{e } g_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^m (\zeta - z)} d\zeta$$

(con il solito orientamento)

è locale ma vale $\forall \rho$ nel dominio di convergenza

dobbiamo far vedere che $g_m(z)$ è 0 da un certo punto in poi

Come z_0 prendo $z_0 = 0$

$$\rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k + g_m(z)\, z^m$$

$$\text{e } g_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)}$$

fisso $z \in \mathbb{C}$ e $\rho \geq R, |z|$ $\quad * |\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| = \rho - |z|$

$$\rightarrow |g_m(z)| \overset{*}{\leq} \frac{\rho^n}{\rho^{m-1}(\rho - |z|)} = \frac{\rho^n}{\rho^m} \frac{1}{\left(1 - \frac{|z|}{\rho}\right)} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{m > n} 0$$

$\rightsquigarrow f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ è un polinomio.

P.122

(5) Le derivate successive di una funzione analitica in un punto z non possono mai soddisfare

$$|f^{(n)}(z)| > n!\, n^n \quad \text{per infiniti } n *$$

Sol

$\exists \rho > 0 \mid f$ è analitica in $|\zeta - z| \leq \rho$ $\quad$ ($\exists$ un aperto in cui è analitica $|\zeta - z| < R$ con $R > \rho$)

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \left| \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{M}{\rho^n} \qquad M = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f| \, ,$$

$$\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{\rho} \longrightarrow \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho}$$

$$* \longrightarrow \left(\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} > n \text{ per infiniti } n \longrightarrow \overline{\lim} \left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = +\infty \quad \lightning$$

Teorema

Data $\{a_n\}$ $a_n \in \mathbb{C}$.

$n!\, a_n$ sono le derivate di una funzione analitica in un punto $\Longleftrightarrow \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$

($\Leftarrow$ è il thm di Weierstrasse)

es (3) 03/04/19 Sia un D disco aperto, $n,m \in \mathbb{N} = \{1,2 \ldots\}$

$$\int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta-z)^n(\zeta-w)^m}\, d\zeta = 0 \qquad \forall\, z,w \in D \qquad \underline{\forall\, n,m \geq 1}$$

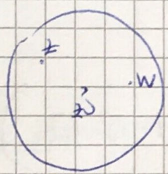
<u>SVOL</u>

$D = \{|\zeta - z_0| < \rho\}$ $\qquad \gamma = \partial D^+$ orientato positivamente

se <u>$m = n = 1$</u>

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-w)} = \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-w}\right)\frac{1}{z-w}\, d\zeta, \quad z \neq w$$

$$= 0$$



$$= \frac{2\pi i}{z-w}\left(\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(w)\right) = 0$$

oppure $\displaystyle\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{1}{\zeta-z} = 2\pi i$ $\quad \leftarrow f(z) \equiv 1, \quad 1 = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-z|=\rho} \frac{1}{\zeta-z}$

per continuità $\left(\text{o perché } \displaystyle\int \frac{1}{(-z+\zeta)^2} = (1)' \right) = 0 \quad \forall\, z,w.$

$$\Rightarrow F(z,w) := \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-w)} \equiv 0$$

se faccio n derivate di z
$\qquad\qquad m$ " di w

$$0 = \partial_z^{n-1}\partial_w^{m-1} F = (n-1)!\,(m-1)! \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^n(\zeta-m)^m} \quad ; \forall\, n,m \geq 1$$

Es sui triangoli

$$T(z_1,z_2,z_3) = \left\{ \sum_{j=1}^{3} t_j z_j \;\middle|\; \sum t_j = 1,\ t_j \geq 0 \right\}$$

(i) T è il + piccolo convesso che contiene z_j

A convesso $\iff \forall\, z,w \in A \quad tz + (1-t)w \in A \quad \forall\, t \in [0,1]$

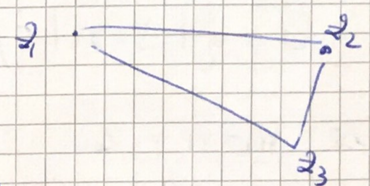
$$t\sum_j t_j z_j + (1-t)\sum_j s_j z_j = \underbrace{\sum_j \left(t t_j + (1-t) s_j\right) z_j}_{\in T}$$

perché $\sum \left(t t_j + (1-t)s_j\right) = 1$

$\longrightarrow$ T convesso

Sia ora A convesso,

$z_j \in A \ \forall j \Longrightarrow \sigma(z_i, z_j) \subseteq A$



es: $z \in \ell$ lato di T ($\ell = \sigma(z_i, z_j)$ $i \neq j$)

NO

$w \in T \setminus \{z\}$

$w = tz + (1-t)z'$ con $z' \in \ell$

$\sum_j t_j z_j = t\left(s z_1 + (1-s) z_2\right) + (1-t)\left(\sigma z_1 + (1-\sigma) z_3\right)$

?

(ii) $\sup_{z,w \in T} |z-w| = d$ è invariante per roto traslazioni di T.

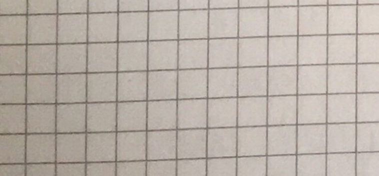
$\longrightarrow$ possiamo assumere $z_1 = 0$ e $|z_3| \geq |z_2|, |z_3 - z_2|$

NO

i punti generici sono della forma $|t_1 z_2 + s_1 z_3 - t_2 z_2 - s_2 z_3| =$

($t_i, s_i \geq 0$ e $t_i + s_i \leq 1$)

$= |(t_1 - t_2) z_2 + (s_1 - s_2) z_3|$



$|t z_2 + (1-t)x| \leq t|z_2| + (1-t)x$

$\leq |z_3|(t + (1-t)) = z_3$