Lezione 08/05/19

Formula generalizzata di Cauchy

f analitica in una regione Ω e $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$

Allora $\forall z \notin \gamma$ $\quad \mathrm{Ind}_z(\gamma) f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

dim

$$F(\xi) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \xi \neq z \\ f'(z) & \xi = z \end{cases}$$

[$z \mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ funzione $z \notin \gamma$

$\gamma \mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ funzionale lineare $z \notin \gamma$]

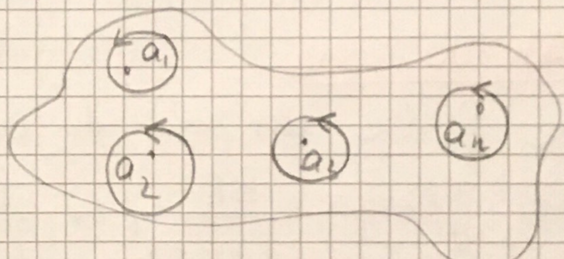
↑ è analitica $\xrightarrow{T.C} \displaystyle\int_\gamma F \, d\xi = 0$

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi}_{2\pi i \, \mathrm{Ind}_z(\gamma)} \Longrightarrow \text{tesi}$$

cvd.

Proposizione

Siano $a_1, \dots, a_n \in \Omega$, Ω regione
$(a_i \neq a_j \ \forall i \neq j)$



Chiamiamo $\Omega' := \Omega \setminus \{a_j\}$

sia γ curva in Ω'

supponendo $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$

Siano $D_j := \{ |z - a_j| < r_j \}$ t.c. $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \emptyset$ con $D_j \subseteq \Omega$

e $C_j = \partial D_j^+$ (ora decompongo γ rispetto a questa base omologica)

e siano gli $n_j := \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma)$

Allora $\gamma \sim \displaystyle\sum_j n_j C_j \pmod{\Omega'}$

def

$\{C_j\}$ è una base omologica di Ω'

OSSERVAZIONE

Stessa cosa se $\{a_j\}$ sono numerabili e senza pti di accumulazione in Ω

dim

$$\left(\sum_j n_j C_j \sim \gamma \ (\mathrm{mod}\ \Omega') \Longleftrightarrow \gamma - \sum_j n_j C_j \ (\mathrm{mod}\ \Omega') \text{ per def} \right)$$

$(\Omega')^c = \Omega^c \cup \{a_1, \dots, a_n\}$

Nel Ω^c se $\sim 0 \ (\mathrm{mod}\ \Omega) \to \mathrm{Ind}_a(\gamma) = 0 \ \forall a \notin \Omega$

e $C_i \sim 0 \ (\mathrm{mod}\ \Omega)$ $\quad (C_i \subseteq \Omega)$

e negli a_j $\quad \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma) = n_j \cdot 1 = n_j \, \mathrm{Ind}_{a_j}(C_j) = \dots$

$$\dots = \mathrm{Ind}_{a_j}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i C_i\right) \quad \left(\mathrm{Ind}_{a_j}(C_i) = \delta_{ij}\right)$$

CVD

def

Ω e Ω' come prima e f analitica in Ω' $\quad$ (C_j come prima)

chiamiamo P_{a_j} := periodo di f rispetto a $a_j := \int_{C_j} f(z)\,dz$

e $\quad \mathrm{Res}_a(f) := \frac{1}{2\pi i} P_a(f)$ il RESIDUO

(NOTA
la def vale anche $\forall a$ nel dominio di definizione di f
e se f è analit. in $a \xrightarrow[\text{Cauchy}]{} P = R = 0$)

osservazione

Se f ha un polo di ordine $h \geq 1$ in a

$$\rightsquigarrow f(z) = \underbrace{\frac{B_h}{(z-a)^h} + \frac{B_{h-1}}{(z-a)^{h-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-a}}_{\text{parte singolare}} + \underbrace{g(z)}_{\text{parte regolare}}$$

$\Longrightarrow \mathrm{Res}_a(f) = B_1$

e si calcola così:

$$(z-a)^h f(z) = B_h + B_{h-1}(z-a) + \dots + B_1 (z-a)^{h-1} + (z-a)^h g(z)$$

faccio $h-1$ derivate e $\boxed{\mathrm{Res}_a(f) = \frac{1}{(h-1)!} D^{h-1}\left((z-a)^h f(z)\right)}$

OSS

Il residuo di f $R = \mathrm{Res}_a(f)$ è l'unico numero complesso per cui $f - \frac{R}{z-a}$ è la derivata di una funzione analitica

(con a sing isolata di f) $\qquad \Updownarrow$

$$\int_\gamma \left(f - \frac{R}{z-a}\right) = 0 \quad \forall \gamma \text{ ciclo}$$

$\forall\ \gamma$ ciclo $\gamma \sim C_n$ C cerchietto attorno ad a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(f - \frac{R}{z-a}\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C f - \frac{R}{z-a}\right) = 0$$

Teorema dei Residui

Sia f analitica su $\Omega' = \Omega \setminus \{a_j\}$. Sia $\gamma \sim 0 (\mathrm{mod}\ \Omega)$, $a_j \notin \gamma$

Allora $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z) = \sum_j \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma) \cdot R_{a_j}(f)$

dim

per il lemma sulla base omologica $\displaystyle \gamma \sim \sum_j \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma)\cdot C_j$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f = \frac{1}{2\pi i}\sum \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma)\int_{C_j} f \underset{\text{def Residuo}}{=} \sum \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma) R_{a_j}(f)$$

cvd.

Generalizzazione del Principio dell'argomento

f meromorfa in Ω con zeri a_j di molt. $h_j \geq 1$
e poli b_i di molteplic. $k_i \geq 1$
con $\gamma \sim 0$ mod Ω, $\gamma \not\ni a_j, b_i$

Allora $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_j h_j \mathrm{Ind}_{a_j}(\gamma) - \sum_i k_i \mathrm{Ind}_{b_i}(\gamma)$

dim

$$\frac{f'}{f} = \frac{h(z-a)^{h-1}g(z)}{(z-a)^h g(z)} + \frac{(z-a)^h g'(z)}{(z-a)^h g} = \frac{h}{(z-a)} + \frac{g'}{g}$$

$[f(z) = (z-a)^h g(z)$ con g analitica in $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}]$

$\longrightarrow$ se integro uso il fatto che $\displaystyle \gamma \sim \sum h_j \underbrace{C_j}_{\partial^+\{|z-a_j| = r_j\}} - \sum k_i \underbrace{C_i}_{\partial^+\{|z-b_i| = r_i\}}$

cvd

esempio

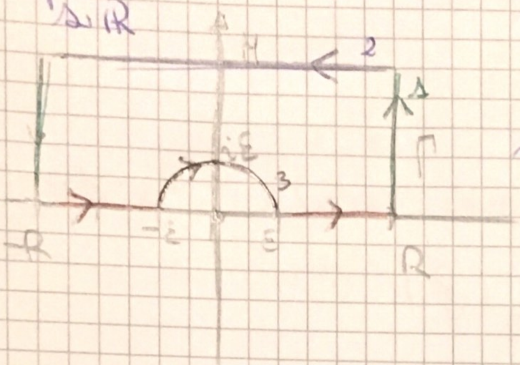
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \ldots$$

$\left[⚠ \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{è intera } z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \right.$

$$= \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} \overset{*}{=} \frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x}$$

cos non è più intera

pari su $\mathbb{R}$



$M > 0, \quad 0 < \varepsilon < R$

$\rightsquigarrow \Gamma \sim 0 \mod (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ($0 \in$ componente illimitata individuata da Γ)

$\Downarrow$

$\int_\Gamma f = 0 \Leftarrow f$ analitica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

in $\underline{1}$

$z(t) = x+iy \quad x = R, \ 0 \le t \le M \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$

$$\left| i \int_0^M \frac{e^{iR} e^{-t}}{R+it} \, dt \right| \le \frac{1}{R} \qquad \left(\int_{\Gamma_1} f(z)dz \text{ con } \Gamma_1 = z(t) = R+it \right)$$

$\rightarrow$ sull'altro lato viene identico con $-i \int$ e $-R$

in $\underline{2}$ $\quad z(t) = iM + t, \quad -R \le t \le R$

$$\left| 1 \cdot \int_{-R}^{R} \frac{e^{it-M}}{iM+t} \, dt \right| \le 2R \frac{e^{-M}}{M} \qquad \left(\int_{\Gamma_2} f dz \text{ con } \Gamma_2 = z(t) = iM+t \right)$$

in $\underline{3}$ $\quad z(t) = \varepsilon e^{-i(t-\pi)} \quad 0 \le t \le \pi \qquad \left(\int_{\Gamma_3} f(z)dz \text{ con } \Gamma_3 = z(t) = \varepsilon e^{-i(t-\pi)} \right)$

$$\int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{-i(t-\pi)}}}{\varepsilon e^{i(t-\pi)}} \cdot \varepsilon \cdot (-i) e^{-i(t-\pi)} \, dt =$$

$$= -i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i(t-\pi)}} \, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -i\pi$$

$$\Longrightarrow \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} = O\left(\frac{1}{R}\right) + O\left(\frac{e^{-M} R}{M}\right) - i\pi + O(\varepsilon) + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}$$

$\parallel \leftarrow \forall$ valore dei parametri

0

$\downarrow M \mapsto \infty$

$$O\left(\frac{1}{R}\right) - i\pi + O(\varepsilon) + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}$$

prendo parte immaginaria

e $R \mapsto +\infty$, $\varepsilon \mapsto 0$

$$0 = -\pi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \overset{*}{\Longrightarrow} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$