Es 1 Sia $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| = 1\}$ e $j : \hat{\theta} \in \mathbb{T}^1 \mapsto j(\hat{\theta}) := e^{i\theta}$, dove $\theta \in \hat{\theta}$. Sia

$$d(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) := \min_{\substack{\theta_1 \in \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 \in \hat{\theta}_2}} |\theta_1 - \theta_2| \, .$$

(i) Dimostrare che d è una metrica su $\mathbb{T}^1$.
(ii) Dimostrare che j è un omeomorfismo (funzione biunivoca e bi–continua) tra il gruppo additivo $(\mathbb{T}^1, +)$ e il gruppo moltiplicativo $(S^1, \cdot)$.
(iii) Si consideri S^1 come sottospazio metrico di $\mathbb{C}$ e si dimostri che la metrica d su $\mathbb{T}$ è equivalente alla metrica indotta da j^{-1}.

Es 2 (Si usino le notazioni dell **Es** dell'8/3/19)
Sia $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e sia $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $z_0 = |z_0| e^{i\theta_0}$. Sia $\lambda : \Omega_{-\theta_0} \to S_{-\theta_0}$ (suriettiva) tale che $\operatorname{Im} \lambda(z_0) = \theta_0$ e tale che $e^{\lambda(z)} = z$, $\forall \, z \in \Omega_{-\theta_0}$.
Dimostrare che $\operatorname{Im} \lambda(z) \in \arg(z) = \hat{\theta}(1, z)$, $\forall \, z \in \Omega_{-\theta_0}$.