(13/3/19)

Es 1 Dimostrare che se $ad - bc = 0$ (a, b, c, d, numeri complessi non tutti nulli) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ è costante (su $\widehat{\mathbb{C}}$).

Es 2 Sia f una mappa di Möbius. Dimostrare che esiste un'*unica* estensione di f a $\widehat{\mathbb{C}}$ che rende f un omeomorfismo di $\widehat{\mathbb{C}}$ su se stesso.

Es 3 Sia $\mathcal{C}$ la famiglia di cerchi o rette di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
(i) Si consideri l'equazione per $x, y \in \mathbb{R}$ data da

$$\sigma(x^2 + y^2) - 2ax - 2by + c = 0 \qquad \text{con} \quad \sigma \in \{0, 1\}\,. \tag{0.1}$$

Si specifichi per quali valori dei parametri si hanno cerchi (specificandone raggio e centro) o rette e si dimostri che al variare di tali parametri si ottiene la famiglia $\mathcal{C}$.
(ii) Sia $J : (x, y) \mapsto \big(x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2)\big)$ (che corrisponde a $1/z$ in $\mathbb{C}$). Si dimostri che $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e studiare tale mappa al variare dei parametri (in particolare si dica quando JC è una retta o un cerchio).

Es 4 Dimostrare che il birapporto (z_1, z_2, z_3, z_4) è reale se e solo se esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $z_j \in C$, $\forall\ j$.

Es 5 Dimostrare che dati tre punti $z_j \in \widehat{\mathbb{C}}$ distinti tra loro e tre punti $w_j \in \widehat{\mathbb{C}}$ distinti tra loro, esiste un'unica mappa di Möbius f tale che $f(z_j) = w_j$.

Es 6 (Simmetrie) Siano dati un cerchio generalizzato $C \in \mathcal{C}$ e tre punti distinti $z_j \in C$. Due punti z e z^* si dicono **simmetrici rispetto a** C se

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}\,.$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:
(i) $z^* = z$ se e solo se $z \in C$.
(ii) Se $C = \mathbb{R}$, allora $z^* = \overline{z}$.
(iii) Le mappe di Möbius conservano le simmetrie rispetto a due dati cerchi generalizzati).

Es 7 Fare gli esercizi 1-5 di [A], Cap 3, par 3.3.