(3/4/19)

Esercizio Dimostrare i seguenti tre lemmi.

Lemma 1 (i) *Sia* Ω *una regione di* $\mathbb{C}$ *e* $f \in C([a,b] \times \Omega, \mathbb{C})$ *tale che, per ogni* $t \in [a,b]$, *la funzione* $z \mapsto f(t,z)$ *è analitica in* Ω. *Allora, la funzione* $F(z) := \int_a^b f(t,z)dt$ *è analitica su* Ω *e* $F'(z) = \int_a^b f_z(t,z)dt$.

(ii) *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due regioni di* $\mathbb{C}$ *e* $f \in C(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{C})$ *tale che, per ogni* $\zeta \in \Omega_1$, *la funzione* $z \mapsto f(\zeta, z)$ *è analitica in* Ω_2. *Allora, per ogni curva* γ *in* Ω_1 *(*C^1 *a tratti) la funzione* $F(z) := \int_\gamma f(\zeta,z)d\zeta$ *è analitica su* Ω_2 *e* $F'(z) = \int_\gamma f_z(\zeta,z)d\zeta$.

Lemma 2 *Sia* Ω *una regione di* $\mathbb{C}$ *e* $f_n \in C(\Omega, \mathbb{C})$ *tali che* $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\Omega} |f_n| < +\infty$. *Allora per ogni curva* γ *in* Ω *(*C^1 *a tratti) si ha*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n dz \, .$$

Lemma 3 *Sia* D *un disco aperto di* $\mathbb{C}$ *e* $n, m \in \mathbb{N} := \{1,2,3,....\}$. *Allora, per ogni* $z, w \in D$, *si ha*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta - z)^n \, (\zeta - w)^m} \, d\zeta = 0 \; , \qquad \forall \; z, w \in D \; , \; \forall \; n, m \geq 1 \, .$$