Es Sia $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, $s_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} \big| \, z = r\, e^{i\theta_0}\, , \forall r \geq 0\}$ e $\Omega_{s_0} := \mathbb{C} \backslash s_{\theta_0}$.

(i) Per ogni $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ definire tutti i "rami analitici del logaritmo", ossia trovare tutte le funzioni analitiche $\lambda := \Omega_{\theta_0} \to \mathbb{C}$ tali che

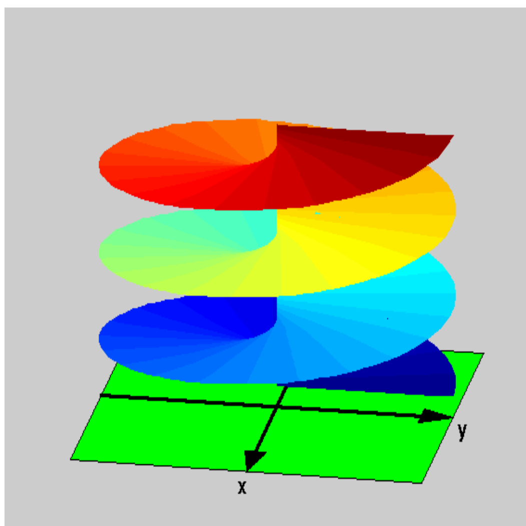
$$e^{\lambda(z)} = z \ , \ \forall \ z \in \Omega_{\theta_0} \ .$$

Determinare $S_{\theta_0} := \lambda(\Omega_{\theta_0})$ e dimostrare che $\lambda\big(e^w\big) = w$, $\forall \ w \in S_{\theta_0}$.

(ii) Introdurre una notazione precisa per tutti i rami del logaritmo e discutere la relazione $\lambda(z_1 z_2) = \lambda(z_1) + \lambda(z_2)$.

(iii) (Superficie di Riemann del logaritmo) Si fissi $\theta_0 = \pi$. È possibile definire un procedimento per "passare da un ramo all'altro in modo analitico"? La costruzione dipende dalla scelta di θ_0?

Per visualizzare in modo intuitivo la costruzione si pensi ad un parcheggio multipiano:



https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-04-complex-variables-with-applications-fall-1999/study-materials/logsurface/