Automorfismi del semipiano*(18/12/23)*

Siano $F(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ e $\psi_{\alpha,t}(z) = e^{i2t}\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{D}$.

Esercizio (i) Dimostrare che se $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc>0$, allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

(ii) Dimostrare che

$$(F^{-1} \circ \psi_{\alpha,t} \circ F)(z) = \frac{bz-A}{az+B}$$

con $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ dati da $a+ib = (1+\alpha)e^{it}$ e $A+iB = (1-\alpha)e^{it}$.

(iii) Dimostrare che $Aa+Bb = 1-|\alpha|^2$.

(iv) Dimostrare che se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ allora esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad-bc>0$ tali che $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.