Omotopie *(23/10/23)*

Definizione Una regione[1] $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connessa* se prese comunque due curve[2] $\gamma_j = \{\gamma_j(t) \big| t \in [a,b]\}$ in Ω con gli stessi estremi $z_1 := \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $z_2 := \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ esiste una *omotopia* H in Ω da γ_1 a γ_2, ossia, esiste una funzione

$$(s,t) \to H(s,t) \in C([0,1] \times [a,b], \Omega)$$

tale che:

$$(\mathrm{H}_1) \quad \begin{cases} H(0,t) = \gamma_1(t) \\ H(1,t) = \gamma_2(t) \end{cases} , \quad \forall\, t \in [a,b]\,; \qquad (\mathrm{H}_2) \quad \begin{cases} H(s,a) = z_1 \\ H(s,b) = z_2 \end{cases} , \quad \forall\, s \in [0,1]\,.$$

In tal caso scriveremo $\gamma_1 \overset{\Omega}{\sim} \gamma_2$.

Esercizio (i) Dimostrare che se Ω è una regione semplicemente connessa, presa comunque una curva chiusa γ in Ω e preso un qualunque punto $z_0 \in \gamma$, allora $\gamma \overset{\Omega}{\sim} z_0$.
(ii) Sia Ω una regione tale che, presa comunque una curva chiusa γ in Ω e preso un qualunque punto $z_0 \in \gamma$, allora $\gamma \overset{\Omega}{\sim} z_0$. Dimostrare che, in tal caso, Ω è semplicemente connessa.

Suggerimento: Siano γ_1 e γ_2 due curve in Ω con gli stessi estremi z_1 e z_2. Sia γ la curva chiusa $\gamma_1 - \gamma_2$ e sia $\gamma(t)$ una sua parametrizzazione con $t \in [0,2]$ tale che $z_1 = \gamma_i(0)$ e $z_2 = \gamma_i(1)$ siano gli estremi comuni delle curve γ_i; sia $r > 0$ tale che $D_r(z_1) \subseteq \Omega$. Si consideri una omotopia H in Ω da γ a z_0 e si scelga un s_0 tale che $H(s,t) \subseteq D_r(z_1)$ per ogni $0 \le s \le s_0$ e per ogni $t \in [0,2]$,....

---

[1] Una regione è un insieme aperto e connesso.

[2] Una 'curva (parametrizzata) γ in Ω' è una funzione continua $t \in [a,b] \to \gamma(t) \in C([a,b],\Omega)$; in particolare, se $z_0 \in \Omega$ la curva banale $\gamma(t) \equiv z_0$ è una curva in Ω. Anche la 'curva di Peano' $\gamma_{\mathrm{P}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, la cui immagine è $[0,1] \times [0,1]$ è una curva in $\mathbb{R}^2$.