Appello X – AC310 **(AA 2023/24 – L. Chierchia) 2/9/2024**

Nome:____________________ **Cognome:**____________________ **Matricola.:**____________________

Motivare tutte le risposte!

Es 1 [10 pt] Quante sono le soluzioni di $z^4 - 9z + 1 = 0$ nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 2\}$?

Es 2 [40 pt] Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}$;

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 \omega x}{\cosh x}\, dx, \qquad (\omega \in \mathbb{R})$.

Es 3 [20 pt] (i) Trovare la trasformazione di Möbius $F(z)$ tale che $F(i) = -2$, $F(\infty) = 2i$ e $F(-i) = 2$ e determinare l'insieme $A = F(\{z : \operatorname{Re} z > 0\})$.

(ii) Sia $F(z) = 2/(z-1)$ e $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Determinare l'insieme $F(D)$.

Es 4 [15 pt] Enunciare il teorema sulle serie di Laurent per funzioni olomorfe su anelli e determinare la serie di Laurent di $\operatorname{senh}(1/z)$ su $\{z \in \mathbb{C} : z \ne 0\}$.

Es 5 [15 pt] Discutere la formula $\displaystyle\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

SOLUZIONI

Es 1 $f = z^4+1$ $g = -9z$. Su $|z|=2$ $|f| \le 17 < |g| = 18$

$\mapsto$ $f+g \ne 0$ su $|z|=2$ e in $\{|z|<2\}$ per Rouché $\#\{f+g=0\} = \#\{g=0\} = 1$.

Es.2 (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac12 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^3}, i\right)$

$\displaystyle= \pi i \cdot \frac12 D^2 (z-i)^3 \frac{1}{(1+z^2)^3}\Big|_i = \pi i \cdot \frac{6}{(2i)^5} = \frac{3}{16}\pi$.

(ii) $\displaystyle f(x) = \frac{\sin^2 \omega x}{\cosh x} = \frac12 \frac{1-\cos 2\omega x}{\cosh x}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac12 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x} \right)$.

Si ha: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\omega x + 2\omega i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos 2\omega x}{\cosh x}, \frac{i\pi}{2}\right) = 2\pi \cosh \omega\pi$

$\hookrightarrow$ $\displaystyle= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x} + \cosh(2\omega\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x} = (1 + \cosh 2\omega\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x}$

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega x}{\cosh x} = 2\pi \frac{\cosh \omega\pi}{1 + \cosh 2\omega\pi} = \frac{\pi}{\cosh \omega\pi}$ e in particolare

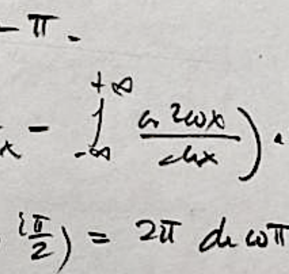
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x} = \pi$. e quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac12 \left(\pi - \frac{\pi}{\cosh \pi\omega} \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \pi\omega} \right)$.

Es.3 (i) $\displaystyle F(z) = 2i \frac{z-1}{z+1}$, $F(\{\operatorname{Re} z > 0\}) = \{w \mid |w| < 2\}$.

(ii) $F(\{|z|=2\}) = \{|w - \frac23| = \frac43\}$, $F(\{|z|=1\}) = \{\operatorname{Re} w = -1\}$

$F(1<|z|<2) = \{\operatorname{Re} w > -1\} \cap \{|w - \frac23| > \frac43\}$

(essendo F a coeff reali, rispetta la simmetria rispetto a $\mathbb{R}$



Es 4 $\displaystyle\operatorname{sh}\frac1z = \sum_{k\ge0} \frac{1}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)}$.