

Sull' ES12 : Dimostrare la formula

105 bis

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Seguendo la seguente traccia:

(i) Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e $\sigma(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2}$. Dimostrare che σ è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli doppi in $z=n$ e parti singolari in $z=n$ dato da $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Dimostrare che $\sigma(z+1) = \sigma(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

(ii) Dimostrare: (a) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh x$ ($z = x + iy$).

(b) $\sinh^2 z = z^2 - \frac{z^4}{3} + O(z^6)$, ($O(z^6)$ significa $az^6 + bz^7 + \dots$)

(c) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \sin^2(z - \pi n) = \sin^2 z$.

(iii) Dimostrare che $\lim_{z \rightarrow n} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{(z-n)^2} \right) = \frac{\pi^2}{3}$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$)

(iv) Dimostrare che $f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sigma(z)$ ha singolarità removibili in $z=n \in \mathbb{Z}$ e che quindi definisce una funzione intera.

(v) Sia $B := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_{\frac{1}{4}}(n)$. Dimostrare che $\exists \delta, M > 0$ t.c.

$|\sin \pi z| \geq \delta$ e $|\sigma(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus B$.

(vi) Usando (iv) e (v) e la periodicità di f , si dimostra che f è limitata e quindi (per Liouville) che è costante.

(vii) Dimostrare che $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(iy) = 0$ e quindi che $f \equiv 0$.
($y \in \mathbb{R}$)