Primo Esonero AC310 **(AA 2023/24 – L. Chierchia) 6/11/2023**

Nome:____________________ **Cognome:**____________________ **Matricola.:**____________________

Motivare tutte le risposte!

Es 1 [25 pt] (i) Descrivere geometricamente e disegnare i seguenti due insiemi di $\mathbb{C}$: $A = \{z : 0 < |z+i| < 2\}$, $B = \{z : |z| > 1 - \operatorname{Re} z\}$.
(ii) Descrivere geometricamente e disegnare la seguente curva parametrica in $\mathbb{C}$: $z(t) = t + i/t$ con $t \in [1,2]$.
(iii) Trovare tutte le soluzioni complesse di $\bar{z} = z^2$ e di $z^8 = 1 + i$.

Es 2 [45 pt] (i) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

(ii) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. (a) Trovare gli zeri di $z \in \mathbb{C} \mapsto \cosh z$. (b) Dedurre le formule di addizione (in $\mathbb{C}$) per $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ da quelle di $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$. (c) Sia $\gamma_R^{\pm} = [\pm R, R + i\pi]$. Dimostrare che $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R^{\pm}} \frac{\cos \alpha z}{\cosh z} dz = 0$.

(d) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\cosh x} dx$ integrando su un cammino che includa la retta $\{z : \operatorname{Im} z = \pi\}$.
(e) A quali valori complessi α si può estendere il risultato?

Es 3 [10 pt] Enunciare il teorema di Rouché e usarlo per determinare il numero di radici di $z^4 + z^3 - 4z + 1$ nell'anello $\{1 < |z| < 2\}$.

Es 4 [20 pt] sia Ω un dominio semplicemente connesso in $\mathbb{C}$ e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ una funzione armonica.
(i) Si definisca $g(z) := 2\partial_z u$. Si dimostri che $g \in H(\Omega)$.
(ii) Si trovi $f \in H(\Omega)$ tale che $\operatorname{Re} f = u$. (iii) Si trovino *tutte* le funzioni olomorfe in Ω di cui u è la parte reale.

Risposte

Es 1 (i): A è il disco di raggio 2 e centro $-i$ senza bordo e centro. B è la parte a destra della parabola (esclusa) di equazione $x = (1 - y^2)/2$.
(ii) È la parte dell'iperbole $y = 1/x$ tra $x = 1$ e $x = 2$ orientata verso destra.
(iii) Le soluzioni di $\bar{z} = z^2$ sono 0, 1 e $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Le soluzioni di $z^8 = 1 + i$ sono $z_k = \sqrt[16]{2} \cdot e^{i\pi/32} \cdot e^{ik\pi/4}$ con $0 \le k \le 7$.

Es 2: (i) $\dfrac{\pi}{3e^2} \cdot (4 - e)$. (ii) (a): $z_k = i\dfrac{\pi}{2} + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (d): $\dfrac{\pi}{2}\left(\cosh \dfrac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1}$. (e): $|\operatorname{Im} \alpha| < 1$.

Es 3: 3 (su $|z| = 1$, $|-4z| > |z^4 + z^3 + 1|$ su $|z| = 2$, $|z^4 + 1| > |z^3 - 4z|$).

Es 4: Fissato $z_0 \in \Omega$, sia $G(z) := \displaystyle\int_{\gamma(z_0,z)} g$ dove γ è una qualunque curva che va da z_0 a z (per il teorema di Cauchy su domini semplicemente connessi, tale integrale non dipende dalla curva ma solo dai suoi estremi). Allora, $G' = g$, $G(z_0) = 0$ e $f(z) = u(z_0) + ib + G$, $b \in \mathbb{R}$, sono tutte e sole le funzioni olomorfe in Ω tali che $\operatorname{Re} f = u$.